对偶空间简史

冯丽霞　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

对偶空间理论是泛函分析的核心内容之一，是泛函分析历史的重要篇章之一。本书通过历史分析和文献考证的方法，以“积分方程的求解”为主线，对对偶空间理论形成的历史脉络进行了较为深入与细致的研究。全书在相关原始文献和研究文献的基础上，对希尔伯特、里斯、黑利、汉恩和巴拿赫等重要数学家的相关工作进行了详细的重构还原和恰当的分析论证，挖掘了孕育在这些数学家工作中的深邃思想，如希尔伯特求解积分方程的代数化方法，里斯具体对偶空间的产生，黑利、汉恩、巴拿赫抽象对偶空间理论的形成等，探究了这一理论产生过程中重要数学家之间的思想传承和突破。

本书可供大学数学专业的师生、科学史工作者和数学爱好者阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

对偶空间简史/冯丽霞著. —北京：电子工业出版社，2019.4
ISBN 978-7-121-36057-2

Ⅰ. ①对… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①对偶空间－历史 Ⅳ. ①O151.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 035372 号

策划编辑：谭海平
责任编辑：谭海平　　特约编辑：王　崧
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：720×1 000　1/16　印张：10.75　　字数：187.2 千字
版　　次：2019 年 4 月第 1 版
印　　次：2019 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：59.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254552。

前　言

19 世纪末 20 世纪初，探寻积分方程求解的一般理论大大推动了数学的发展. 希尔伯特在弗雷德霍姆第二型积分方程工作基础上研究积分方程的求解理论，他借助内积这个数学工具将积分方程问题转化为无穷线性方程组的求解问题，借用代数方法处理分析中的问题，其方法蕴含着泛函分析中无限维空间的对偶思想. 希尔伯特有关积分方程求解的一系列论文中蕴含着深刻的泛函思想，被认为是泛函分析思想的开端，为泛函分析的发展奠定了坚实基础.

里斯充分吸收了希尔伯特积分方程工作中的思想精髓，将代数化方法推广到勒贝格平方可积函数空间、p 次可积函数空间上积分方程的求解，在此过程中，产生了具体的对偶空间，其中 L^p 与 L^q 的对偶在数学史上具有划时代意义. 里斯这些深邃的思想吸引了众多数学家对对偶空间理论的探索.

在 20 世纪数学更加抽象化和统一化思潮驱使下，顺应结构数学发展的趋势，产生了用统一的一般观点考虑所有这些具体对偶空间的必要性，希尔伯特和里斯的具体对偶空间思想与方法引起了一大批追随者的兴趣. 这些思想方法经过奥地利数学家黑利、汉恩和波兰数学家巴拿赫等人的进一步抽象，逐步建立了抽象的对偶空间.

对对偶空间理论的历史进行研究有重要意义. 首先，对偶空间是函数空间的推广，是泛函分析中的核心概念之一，对偶空间理论也是泛函分析的重要内容，对其历史进行研究有助于理解泛函分析发展的历史进程. 其次，对希尔伯特、里斯、黑利、汉恩和巴拿赫等重要数学家原始文献的解读，有助于厘清数学家之间的思想传承以及他们的数学思想对近现代数学的影响. 最后，这一梳理为积分方程和泛函分析的教学提供历史背景，使数学专业的学生理解抽象数学概念、数学理论背后的具体问题来源，从而促进学生更深刻地理解相关数学知识.

本书以“积分方程的求解”为主线，详细梳理了 20 世纪初起始的对偶空间形

成过程中重要数学家的工作，探讨了如何由具体问题逐步产生抽象数学概念的过程，以及概念形成后随着新的数学理论的产生与引入如何进行更高一级抽象的过程，由此理解重要数学概念、数学理论和数学分支形成的历史脉络.

本书结构清晰、层次分明、表述准确、论述有力、内容丰富，可作为数学类专业高年级本科生和研究生学习泛函分析和泛函分析史的参考用书，也可作为科学史工作者和数学爱好者的参考用书.

衷心感谢导师李文林研究员及西北大学曲安京教授对本书的指导和帮助，感谢家人对我的关心、支持和帮助，感谢国家自然科学基金（11471189）及山西师范大学数学与计算机科学学院的资助.尽管作者对书稿进行了多次校对，由于水平有限，不足之处在所难免，敬请各位读者批评指正.

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　背景及意义

19 世纪以来，数学的发展进入了一个新的阶段．由于欧几里得第五公设的研究，引出了非欧几何这门新兴学科；对于代数方程求解问题的一般思考，创立了群论；对数学分析的进一步研究又建立了集合论等．19 世纪的数学已经呈现出千姿百态的多样性①，到了 19 世纪末 20 世纪初，“出现了用统一的观点来理解 19 世纪数学各个分支所积累的大量实际材料的必要性．”②在这样的观点下，“泛函分析的基本概念从不同的方面和不同的联系中产生了．”③可以说，分析、代数、几何与拓扑中数学思想方法的交融是泛函分析得以发展壮大的力量之源．

首先，集合论是泛函分析形成的基础．当 19 世纪在分析中建立严密性成为必然趋势时，数学家们不得不面对有关无穷集合的许多问题．尤其是在对不连续函数研究时，需要考虑使函数不连续或者使收敛问题困难的点集，由此导致了集合论的建立．在这个过程中，贡献最大的是德国数学家康托尔（Georg Cantor，1845—1918 年）的工作．他在研究函数的三角级数表达式唯一性问题时开始接触无穷点集，认识到建立集合论重要的是把数的概念从有穷数推广到无穷数④，在德国数学家狄利克雷（Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet，1805—1859 年）和黎曼（Bernhard Riemann，1826—1866 年）等人工作的基础上系统发展了一般点集理论．泛函分析是研究无穷维函数空间的学科，有了无穷点集理论，各种具体和抽象函数空间的形成才有了根基．可以说，没有无穷点集理论，就不会有泛函

---

① 胡作玄．近代数学史[M]．济南：山东教育出版社，2006: 202.

② A. D. 亚历山大洛夫等著．数学——它的内容、方法和意义（第三卷）[M]．北京：科学出版社，2001: 218.

③ A. D. 亚历山大洛夫等著．数学——它的内容、方法和意义（第三卷）[M]．北京：科学出版社，2001: 218.

④ 李文林．数学史概论（第 2 版）[M]．北京：高等教育出版社，2002：255-258.

分析学科的诞生，甚至不会有现代分析的整座数学大厦.

其次，勒贝格积分理论是泛函分析发展的助推器．在 19 世纪中后期，分析学上的一个重要课题是“不连续函数的可积性问题”．通过对黎曼积分的研究发现，不仅在有限处不连续的函数是黎曼可积的，而且许多数学家们构造出了很多在无限处不连续的可积函数，这就引出了“如何衡量点集大小”的问题．在这个过程中，数学家们重新审视“实数轴”这个看似已很熟悉的研究对象，在极限思想指导下，进一步建立起完备的实数理论，如确界原理、区间套定理、柯西收敛定理等．在此基础上，取得突破进展的是法国数学家勒贝格（Henri Léon Lebesgue，1875—1941 年），他创造性地把关于集合的代数和外测度的概念结合起来，建立了勒贝格测度理论．在其论文“积分、长度与面积”①中，他第一次叙述了关于测度和积分的思想，建立了以测度为基础的勒贝格积分理论，他的工作替代了 19 世纪的创造②．在这个全新理论支持下，黎曼可积性的问题便迎刃而解，即黎曼可积函数是几乎处处（即除去一个零测集外）连续的．当然勒贝格积分理论可以应用到更广泛的函数空间（本书第 3 章和第 4 章中都有体现）以及级数理论等其他数学分支．虽然该理论像集合论一样在初期遭到许多数学家的强烈反对，但它在解决积分方程问题中的成功应用大大促进了泛函分析学科的诞生．事实上，没有勒贝格积分理论，函数空间的研究是无法想象的③．法国数学家和数学史家迪厄多内（Jean Alexandre Eugène Dieudonné，1906—1992 年）也认为：“如果没有勒贝格积分，泛函分析的发展进程可能会缓慢下来.”④

第三，代数学为泛函分析提供了强有力的研究方法．随着 18 世纪行列式的广泛应用，行列式本身成为独立的研究对象，19 世纪数学家们得到了更丰富的行列式理论及其相关理论，如二次型理论、矩阵理论和线性变换理论以及线性空间理论等．它们不仅为解决代数学问题提供了实用的工具，促使代数学独立，而且由此引出了一系列新领域．19 世纪 90 年代，关于无限维矩阵的研究直接导致泛函

① Lebesgue H. Intégrale, longueur, aire [J]. Annali di matematica pura ed applicata, 1902, 7(1): 231-359.

② [美]莫里斯 • 克莱因著．邓东皋，张恭庆等译．古今数学思想（第四册）[M]．上海：上海科学技术出版社，2002: 123.

③ Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators [M]. Springer Science & Business Media, 2007: 614.

④ Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 120.

分析的诞生①．积分方程求解理论质的飞跃是积分方程的代数化，同时线性空间与集合论的结合促进了无限维函数空间的产生，线性变换及其特征值理论是算子及其谱理论的原型，而这些是泛函分析的基本研究内容．总之，代数学为泛函分析提供了强有力的方法．19 世纪代数学的发展已比较系统完善，其方法较简单，操作性强，代数方法在分析学中的应用，会使分析中的问题变得简单．

第四，拓扑结构促进了泛函分析的抽象化发展．拓扑学是现代分析的抽象基础，它将分析从实数轴推广到一般空间．拓扑结构是一类重要的数学结构，为我们提供了一种对空间的邻域、极限及连续性等直观概念的抽象的数学描述②，它反映出一个集合各个元素间亲疏远近的关系．由于想要把康托尔的集合论和函数空间的研究统一起来，法国数学家弗雷歇（Maurice Fréchet，1878—1973 年）在 1906 年开创了抽象空间的研究③，他推广了距离概念，引进了度量空间，为函数空间的统一化奠定了基础．后来，数学家们在函数空间中引入范数概念，通过范数又引入了拓扑结构．拓扑结构的引入打开了泛函分析抽象化的大门，促成了泛函分析成为一门独立的学科，推动了泛函分析学科向更高深度不断发展延伸．

20 世纪二三十年代，集代数、几何、分析和拓扑的观点方法于一身的泛函分析学科创立．经过一个多世纪的发展，泛函分析已成为现代数学的一个基础学科，是现代分析数学的重要分支之一，被当今科学界喻为“20 世纪的微积分”④，几乎每位数学家都需对它有所了解⑤．

从其名称我们看到，泛函分析就是关于“泛函”的分析．由此可看到“泛函”在泛函分析创立之初的核心地位．实际上，泛函分析的创立确实始于“泛函”抽象概念的建立．

1887 年意大利数学家沃尔泰拉（Vito Volterra，1860—1940 年）在狄利克雷关于函数综合概念思想的影响下，认识到一些数值，与函数不一样，不是与某一

① 胡作玄．近代数学史[M]．济南：山东教育出版社，2006: 391.
② 胡作玄，邓明立．20 世纪数学思想[M]．济南：山东教育出版社，1999: 90.
③ [美]莫里斯 • 克莱因著．邓东皋，张恭庆等译．古今数学思想（第四册）[M]．上海：上海科学技术出版社，2002: 262.
④ 定光桂．关于《泛函分析》课程教学改革的试探[J]．高等理科教育, 2001, (3): 8-10, 17.
⑤ 季理真．Great mathematics books of the twentieth [M]．北京：高等教育出版社，2013: 166.

或有限的数值相关，而是与一系列连续变化的数值相关，即与一个函数或若干函数相关，由此给出了“（线）函数的函数”——泛函的定义，并试图建立与函数微积分理论相应的一套理论，开创了“泛函”理论的研究，并得到法国数学家阿达玛（Jacques Solomon Hadamard，1865—1963 年）的重视．

之后，弗雷歇受其导师阿达玛的影响在连续线性泛函表示方面做了深入研究，并使之得以传承发扬．里斯（Frigyes Riesz，1880—1956 年）在发展希尔伯特（David Hilbert，1862—1943 年）积分方程理论的过程中，建立起连续线性泛函表示与积分方程之间的关系．经过黑利（Eduard Helly，1884—1943 年）、汉恩（Hans Hahn，1879—1934 年）和巴拿赫（Stefan Banach，1892—1945 年）等人的进一步抽象，提出并解决了一般赋范线性空间上连续线性泛函的存在性问题，建立起连续线性泛函的空间理论，此即为对偶空间理论．

对偶空间即为一个赋范线性空间上所有连续线性泛函构成的空间，它的出现是泛函分析中的重要事件之一．泛函分析学科的确立就以空间理论、算子谱理论和对偶空间理论的形成为标志．

对偶空间的出现，对数学学科及其他学科都有很大的推动．

直观而言，任何希尔伯特空间都有正交基，有了它，就可在希尔伯特空间中建立直角坐标系，可借用代数方法研究分析中的问题．但是一般巴拿赫空间中并不能保证正交基的存在，也就无法建立坐标系，关于这个空间的研究就会变得很复杂，因为很难将几何问题转化成代数问题从而借助代数方法处理[①]．一个巴拿赫空间上全体连续线性泛函组成的空间（即对偶空间）实际上充当了坐标的角色，由此不难理解对偶空间的重要性．

数学史上，对偶空间一词经历了 polarer Raum[②]、transponierter Raum[③]、espace conjugué[④]、adjoint space[⑤]等名称的变迁．1938 年布尔巴基提出 dual space[⑥]，该词被多数数学家接受至今．

---

① http://blog.sciencenet.cn/blog-40247-594715.html.

② Hahn H. Über Folgen linearer operationen [J]. Monatshefte für Mathematik, 1922, 32(1): 3-88.5.

③ Schauder J. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen [J]. Studia Mathematica, 1930, 1(2): 183-196.

④ Schauder J. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen [J]. Studia Mathematica, 1930, 1(2): 183-196.

⑤ Alaoglu L. Weak topologies of normed linear spaces [J]. Annals of Mathematics, 1940: 252-267.

⑥ Bourbaki N. Sur les espaces de Banach [M]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1938, 206: 1701-1704.

由其名称演变可看出对偶空间的双重性，即它不仅是一个巴拿赫空间，而且因为其是某一空间上连续线性泛函构成的空间而具有超越一般巴拿赫空间基本属性的特有性质，如对偶空间中的弱*紧定理．这种双重性使得对偶空间理论不仅在其形成之初在积分方程和线性方程组求解问题中起到重要作用，如里斯等人通过对偶空间定义积分算子的对偶算子，而且在形成之后促进了对原空间性质的研究．特别是在之后泛函分析的进一步发展中，通过对巴拿赫代数，C^*代数在其对偶空间单位球上的表示，不仅促进了对这类代数的深刻认识，而且通过这种表示促进了对自伴算子、正规算子等特殊算子谱理论的深入研究．

同时，对偶空间在应用数学领域和其他领域应用广泛，为其他学科提供了理论依据和技术支持．微分几何中切空间的概念与泛函分析中对偶空间的概念有密切联系①．小波分析理论中，可利用对偶空间研究小波空间结构，如对双正交小波与多分辨分析的研究，得出了许多有价值的结论．在遥感领域，可通过投影变换，分别将直线的灰度级标准差及其边缘梯度矢量均值映射到相应的对偶空间，进而在对偶空间上根据直线的标准差和边缘梯度矢量的峰谷分布规律检测道路目标②．在理论力学中，量子矩阵力学和波动力学建立后，海森堡学派和薛定谔学派起初都难以容忍对方的理论，但薛定谔（Erwin Schrödinger，1887—1961 年）后来证明，虽然矩阵力学与波动力学出发点不同，形式也完全相异，但二者可导出同样的结果，两者在物理上完全等价③．其实就是因为它们各自一切可能的状态构成一个希尔伯特空间，而这两个希尔伯特空间互为对偶空间．还有，在计算机通信技术领域，在物理空间和信息空间之间实现人机交互的原理就依赖于它们间存在的对偶关系，从而可利用对偶空间将问题转化．又如，在经济学中，美籍匈牙利数学家冯•诺依曼（John von Neumann，1903—1957 年）于 1947 年将对偶的思想引入经济学，在经济学中提出并创立了对偶理论，主要研究经济学中的相互确定关系，如经济学中典型的产出与成本的对偶、效用与支出的对偶等，为经济学的研究提供了全新而强有力的技术支持．当然，对偶空间的思想还体现在其他许多方面．

① 徐西安．“泛函分析”教学方法探讨[J]．高等数学研究, 2008, 11(1): 73-75.

② 谢凤英，姜志国，秦世引．对偶空间上的高分辨率遥感影像道路提取[J]．宇航学报，2006, 27(5): 1034-1038.

③ 刘国钰．对偶空间在理论力学中的应用[J]．技术物理教学, 2013, 21(2): 6-8.

由上分析可知，对偶空间理论是泛函分析的重要内容之一，在理论与应用中都有重要作用，研究对偶空间理论的创立及思想演变，无论是从数学史角度还是从科学史角度，都有重要的理论价值及现实意义.

1.2 问题提出

对偶空间理论是泛函分析史乃至数学史上的一段精彩篇章，对其历史的探讨在目前有关泛函分析各方面历史研究的著述中都有所涉及，下面我们分类举例说明.

第一类，有关泛函分析历史专著中对对偶空间理论的研究.

荷兰乌得勒支大学数学教授莫纳（A. F. Monna）1973 年出版的《历史观点下的泛函分析》①一书是数学史上第一本描述泛函分析发展历史的著作，作者用四章的篇幅简要描绘了泛函分析的发展历史. 它的目的有两个：一是概括发展；二是突出被忽略的一些先驱者的工作②. 第一章从无穷线性方程组、积分方程、矩量问题、希尔伯特与黑利和里斯工作的补充说明、公理化以及算子理论这几方面概括了泛函分析的发展；第二章主要通过捷克数学家波尔查诺（Bernard Bolzano，1781—1848 年）、法国数学家拉盖尔（Edmond Nicolas Laguerre，1834—1886 年）、德国数学家格拉斯曼（Hermann Gunther Grassmann，1809—1877 年）和意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano，1858—1932 年）的观点说明线性空间概念的发展；第三章对意大利学派和法国学派有关一般分析的工作做了述评，意大利学派主要讨论了平凯莱（Pincherle Salvatore，1853—1936 年）的工作，法国学派简要介绍了波莱尔（Emile Borel，1871—1956 年）和弗雷歇的工作；第四章讨论了现代泛函分析中有影响力的一些主题，如维尔斯特拉斯定理、巴拿赫代数、哈尔测度、函数的产生、非阿基米德分析、经典问题及泛函分析中的基本定理等.

布尔巴基学派创始人之一法国数学家和数学史家迪厄多内的《泛函分析史》③一

① Monna A. F. Functional analysis in historical perspective [M]. Utrecht, The Netherlands Publishing Company Oosthoek, 1973.

② Aupetit B. Functional analysis in historical perspective by A. F. Monna. Utrecht (Oosthoek Publishing Co). 1973. 17S p [J]. Historia Mathematica, 1976(No.1): 93-95.

③ Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981.

书“以翔实的材料详细探讨了泛函分析的历史和发展，以拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1736—1813 年）和丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoull，1700—1782 年）的工作为开端，通过 20 世纪前期弗雷德霍姆（Ivar Fredholm，1866—1927 年）、希尔伯特和里斯的思想传承，一直到 20 世纪 60 年代结束.”①

该书共九章，包括线性微分方程和斯图姆-刘维尔问题、“密码”方程、振动弦方程、无穷的思想、希尔伯特空间的重要发展时期和定义、对偶和赋范空间的定义、1900 年之后的谱理论、局部凸空间和分布理论，以及泛函分析在微分和偏微分方程中的应用等内容．前三章可以视为泛函分析的前史．该书系统地介绍了如何从求解方程问题到希尔伯特空间、赋范线性空间和谱理论的形成，在此基础上进一步探讨了分布理论，最后探讨这些抽象理论的具体应用，其中直接涉及对偶空间理论的是第六章，第一节给出了阿达玛、弗雷歇和里斯的相关连续线性泛函表示的结果，第二节简要陈述了里斯关于 L^p 和 l^p 空间的工作，并探讨了 L^p 和 L^q（$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$）的对偶，第三节介绍赋范线性空间和泛函延拓定理的诞生，第四节介绍“驼峰”和“贝尔纲”方法．

德国耶拿弗里德里希・席勒大学数学史家皮特施（Albrecht Pietsch，1934—）的《巴拿赫空间和线性算子理论历史》②是一本有关巴拿赫空间和线性算子理论的历史巨著，洋洋洒洒，共 877 页．作者在序言中就说，莫纳的《历史观点下的泛函分析》和迪厄多内的《泛函分析史》主要致力于介绍 20 世纪 50 年代前的泛函分析，而他愿意冒险去探索整个泛函分析的发展史，也考虑了 20 世纪 50 年代后泛函分析的发展．作者 1958 年获得硕士学位时，正是巴拿赫空间理论鼎盛之时，经历了 50 年代后期泛函分析的发展历程，有机会收集详细材料，从而给他的研究提供了便利．作者使用集合论、拓扑、代数、组合数学、概率理论和逻辑等工具，从整体的角度将巴拿赫空间作为数学的一部分，而不是作为孤立的学科来呈现．作者认为从科学的观点而言，重要的不是“谁证明了这个定理”，而是“为什么以及如何证明一个定理”．因此这本书“以数学的历史”而非“数学家的历史”呈现内容，由于作者涉及的历史事件数量众多，时间跨度大，不能详尽描述每一历史事件的产生发

① http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dieudonne.html.

② Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators[M]. Springer Science & Business Media, 2007.

展及各个数学家之间的思想传承，但也给我们提供了一定的研究线索和空间.

以上这几本著作或多或少都涉及了相关数学家的研究工作，如希尔伯特、里斯和黑利的工作，且都提到了里斯的 L^p 空间与 L^q 空间的对偶工作.

第二类，与泛函分析史相关的专题论文中对于对偶空间理论的研究.

在此列举一些有代表性的。

贝恩科普夫（Michael Bernkopf）的“以积分方程为起源的函数空间的发展”①这篇文章从积分方程理论角度探讨函数空间的发展，是一种百科全书式的描述②，共五章. 第一章从代数和分析两方面探讨函数空间思想的萌芽；第二章讨论希尔伯特的积分方程和无限二次型理论；第三章介绍弗雷歇有关抽象度量空间的工作；第四章探讨希尔伯特之后函数空间理论的发展，如美国数学家摩尔（Eliakim Hastings Moore，1862—1932 年）的工作、德国数学家施密特（Erhard Schmidt，1876—1959 年）在希尔伯特序列空间引入几何结构、里斯-费舍尔定理的发现、里斯引入 L^p 空间、希尔伯特空间的公理化等工作；第五章讨论关于巴拿赫空间及其对偶空间的发现，主要有除巴拿赫以外的其他数学家对巴拿赫空间的研究、巴拿赫创立巴拿赫空间、对偶空间的发现.

哈佛大学数学系教授伯克霍夫（Garrett Birkhoff，1911—1996 年）的“泛函分析的创立”③一文列举了泛函分析发展史上的重要事件，并简要概述了一些重要数学家的工作，如意大利学派的一些先驱工作、希尔伯特和里斯的积分方程工作、“泛函分析”一词出现后该学科的发展情况.

“泛函分析简史”④一文通过概述泛函分析发展史上一些具体而重要的历史事件来概括泛函分析学科的发展，文中简要提到了里斯关于平方可积函数空间的工作，黑利、汉恩和巴拿赫的赋范线性空间工作.

“泛函分析的起源和早期历史”⑤一文首先介绍 18 世纪和 19 世纪由于常微分

---

① Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1966, 3(1): 1-96.

② Aupetit B. Functional analysis in historical perspective By A. F. Monna. Utrecht (Oosthoek Publishing Co). 1973. 17Sp [J]. Historia Mathematica. 1976 (No.1): 93-95.

③ Birkhoff G., Kreyszig E. The establishment of functional analysis [J]. Historia mathematica, 1984, 11(3): 258-321.

④ Neal L. Carothers. A Brief History of Functional Analysis. BGSU Colloquium, October 15, 1993.

⑤ Lindström J. On the origin and early history of functional analysis [R]. Technical Report UUDM Projrect Report 2008: 1, Uppsala Universitet, 2008.

方程和偏微分方程的研究促进了函数概念和极限概念的发展；其次详细介绍了积分方程理论的发展，在此基础上研究弗雷德霍姆的积分方程理论和希尔伯特的积分方程工作与谱理论；最后探讨空间概念的发展和紧算子理论的形成．这篇文章通过较长篇幅从空间和算子的角度探讨泛函分析学科 1918 年之前的发展．

“里斯表示定理的形成”①一文以很长的篇幅讨论 $C[a,b]$ 上连续线性泛函表示定理的形成历史，作者认为表示定理的出现统一了长期以来函数中存在的“综合”观点和“解析”观点的矛盾．详细介绍了沃尔泰拉的泛函思想、阿达玛和里斯关于 $C[a,b]$ 上的泛函表示工作．

还有一些专门讨论某一数学家历史贡献的论文，如“莫里斯·弗雷歇的研究”②和“作为泛函分析先驱的里斯”③等，它们对弗雷歇和里斯个人的数学工作进行研究，对他们在连续线性泛函表示方面的工作有所陈述．

第三类，泛函分析史的学位论文中有关对偶空间理论的研究．

“20 世纪 50 年代前泛函分析历史研究”④一文对泛函分析发展过程中的主要数学家及主要事件做了概述，并简要介绍了泛函分析在中国的发展．“里斯在泛函分析中的两个重要定理”⑤一文讨论了里斯-费舍尔定理和里斯表示定理的形成．“弗雷歇对泛函分析及一般拓扑所做的贡献”⑥一文讨论了弗雷歇在泛函表示和度量空间方面的工作．“里斯对泛函分析的贡献”⑦一文概述了里斯在泛函分析创始期和独立发展期的贡献，文中讨论了里斯关于 L^p 空间的对偶工作．“希尔伯特的积分方程理论”⑧和“积分方程之巴拿赫空间理论的研究”⑨分别探讨了希尔伯特的特征值理论和巴拿赫空间理论的形成，且文中都提及了 L^p 空间与 L^q 空间的对偶．

① Gray, J. D. The shaping of the riesz representation theorem: A chapter in the history of analysis [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1984, 31(2): 127-187.

② Taylor, A. E. A study of Maurice Frechet: I. His early work on point set theory and the theory of functional [J]. Arch. Hist. Ex. Sc. 1982, 27(3): 233-295.

③ Kreyszig E. Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis [J]. Elemente Mathematik, 1990, Vol. 45: 117-130.

④ 付琳．20 世纪 50 年代前泛函分析历史研究[D]．济南：山东大学，2010.

⑤ 王丹丹．里斯在泛函分析中的两个重要定理[D]．西安：西北大学，2013.

⑥ 王冰霄．弗雷歇对泛函分析及一般拓扑所做的贡献[D]．西安：西北大学，2013.

⑦ 范丹丹．里斯对泛函分析的贡献[D]．石家庄：河北师范大学，2014.

⑧ 李亚亚．希尔伯特的积分方程理论[D]．西安：西北大学，2015.

⑨ 李威．积分方程之巴拿赫空间理论的研究[D]．西安：西北大学，2015.

第四类，通史类的专著中关于对偶空间理论的研究.

《古今数学思想》是美国数学家、数学教育家和数学史家莫里斯·克莱因（Morris Kline，1908—1992 年）的著作，该书在科学界、整个学术文化界都有广泛、持久的影响. 其中第 44 章讨论了实变函数论中勒贝格积分理论的发展，这是促进泛函分析发展的一个重要工具. 第 46 章从泛函、算子、范数和希尔伯特空间的公理化几个角度概述了泛函分析学科的发展. 该书提到“巴拿赫在 1929 年引进了泛函分析这一学科的另一个重要概念，这就是一个巴拿赫空间的对偶空间或伴随空间”①.

《数学史概论》②在第十一章第二节简要介绍了泛函分析中一些主要基本概念的历史. 如变分法中孕育的泛函概念，积分方程求解中希尔伯特空间的诞生，进而到巴拿赫空间等更一般抽象函数空间的产生. 又如，对物理学中应用广泛但难以理解的“奇怪”函数的研究引出广义函数概念的产生等.《近现代数学史》③从泛函分析作为 20 世纪一个数学分支的角度出发，按时间顺序列出了泛函分析发展的三个阶段，并概括了每个阶段的发展特点. 作者对里斯 1907 年和 1910 年的工作有所论述，在第 651 页还提到“里斯发现，L^p 上连续线性泛函的全体构成一个‘对偶的’空间 L^q ”.《20 世纪数学思想》④中描述了泛函分析发展的几个阶段，也提到了 L^p 空间与 L^q 空间的对偶.

综上所述，目前关于对偶空间理论历史研究的相关文献形式多样，精彩纷呈，从这些文献中或多或少都能捕捉到有关对偶空间理论历史的蛛丝马迹. 整体而言，目前对在对偶空间理论形成过程中起关键作用数学家的研究成果及贡献都是比较清楚的，然而相关数学家之间的思想传承比较模糊，对数学家诸多“神来之笔”的思想方法缺乏深入探究. 例如，希尔伯特为何要发展无限二次型理论？弗雷歇泛函表示思想的本质是什么？他们工作的突破之处和局限之处是什么？里斯为何要引入 L^q 空间？ L^p 空间与 L^q 空间为什么对偶以及历史影响如何？追随者们又是如何继承与发展前人的思想方法和理论等一系列深层次的问题都值得去探讨.

---

① [美]莫里斯·克莱因著. 邓东皋，张恭庆等译. 古今数学思想（第四册）[M]. 上海：上海科学技术出版社，2002：177.

② 李文林. 数学史概论[M]. 北京：高等教育出版社，2002：278-281.

③ 胡作玄. 近现代数学史[M]. 济南：山东教育出版社，2006：650-653.

④ 胡作玄，邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南：山东教育出版社，1999：118-122.

在对泛函分析相关文献研读的过程中，我们认识到泛函的产生虽然有具体的问题背景，但其问题背景并不集中，其产生过程更加体现的是 19 世纪末数学家对数学“综合”认识和抽象概括的思潮，连续线性泛函只是一种特殊的对应关系，连续线性不仅是泛函所定义空间基本性质的反映，更是数学家对泛函这一新兴概念深入认识的最基本条件和出发点，对连续线性泛函进行表示是认识这类泛函的一种方式和手段，这种认识过程与数学家对函数能否表示为幂级数或傅里叶级数的认识有某种共性．而连续线性泛函的空间结构及其基本属性正是在对具体函数空间上连续线性泛函的具体表示过程中才逐渐被认识的，从而产生对偶空间的思想并逐渐形成抽象理论．

虽然研究者一致认为对偶空间理论在泛函分析中占有重要地位，但目前很多工作都侧重于泛函分析中的巴拿赫空间理论，算子谱理论或者某一重要数学家在泛函分析方面贡献的历史研究、关于对偶空间理论的一些历史研究比较分散，没有一条明晰的线索系统探讨其发展历程．

诚然，对偶空间首先是一个空间，是对偶算子的依附空间，但将其历史的研究纳入空间历史和算子历史的研究中，忽略了对偶空间的二重性，降低了对偶空间在泛函分析中的重要地位．当然，这也是由于产生对偶空间的具体问题来源并不集中的原因．如弗雷歇是受其导师阿达玛的影响，以建立类似于函数级数的表达形式为思想出发点而开展连续线性泛函表示的研究的，里斯是在研究“积分方程问题”时涉及连续线性泛函表示的工作的．另外，数学史上公认汉恩-巴拿赫泛函延拓定理的出现标志着对偶空间的形成，这是因为汉恩-巴拿赫泛函延拓定理解决了泛函存在性的基本问题，因此在现有泛函分析史涉及对偶空间的研究文献中，侧重于汉恩-巴拿赫泛函延拓定理形成历史的研究．

迪厄多内在其著名的《泛函分析史》一书中说：

“如果想要用简洁的语言来概括泛函分析产生的复杂历史，那就是：谱理论和对偶理论．这两个理论都源自具体问题的求解——积分方程（或线性方程组），方程中的未知量都是函数．[①]”

① Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 4.

可见对偶理论是泛函分析的核心理论之一．本书通过解读主要数学家的相关工作来分析他们之间的思想传承与突破，意欲勾勒出一条较为清晰的历史发展脉络，探讨对偶空间的形成以及发展，以期从对偶的角度进一步了解泛函分析的发展进程，了解对偶的观念对分析学乃至整个数学发展的影响．

1.3 方法与目标

任何学科的研究都少不了方法论的指导，有关数学史研究方法论的问题，尤其是近现代数学史，在国内越来越受到一些数学史家的关注[①]．李俨、钱宝琮先生主张“发现”传统，吴文俊先生倡导“复原”传统，随着近几十年来对近现代数学发展历程的大力研究，曲安京教授还提倡数学史研究也应关注“为何做出数学”，进一步扩充了数学史研究的内容和方法．

与古典数学相比，近现代数学呈现出独有的特征，这使得对其历史的探讨提出了新的要求．

第一，随着数学的发展，近现代数学的严密性已经很强，逻辑链条有序，一般的推理过程也清晰完整，因此无须对问题的结论进行合理重建，而对于“为何会产生这样的结论”的研究将会很有意义．这不仅是历史的需要，而且是数学自身的需要．第二，近现代数学分支愈来愈多，愈来愈细，同时各个分支之间联系紧密，交叉作用，因此有必要全面透彻领悟数学家思想的来源和动机、数学家之间思想的传承以及数学理论的形成脉络．第三，近现代以来，创办了很多专业性很强的数学杂志，它们清晰地记载了数学史上的重要概念、重要理论等重大事件及其做法，使得数学知识、思想方法能广泛传播和接受．然而，数学家公开发表的论文和著作呈现给我们的是经过仔细锤炼的、成熟的、“定义-定理-证明”式的逻辑思想体系，而对于蕴含其中的概念定理算法等思想的来源、提出原因等问题不能知晓，这就需要我们在一系列的历史链条中去探索、追溯和重构，理解数学理论产生的内因和外因．只有这样，才能真正理解数学理论的产生及其发展，才能真正洞悉数学家的思想．

曲安京教授在“中国数学史研究范式的转换”一文中也提出：

① 王昌．点集拓扑学的创立[D]．西安：西北大学，2012.

“数学思想始终是数学史研究所应关注的主题，在很大程度上，数学史就是数学思想史．当我们在旧的研究范式的指导下去发现、复原、回顾并欣赏历史上的各种各样丰富多彩的、具体的数学成就的时候，一个重要的方面常常会被我们所忽略，那就是，历史上为什么会产生这样的数学？”①

本书即在此思想指导下，在阅读大量原始文献和研究文献的基础上，利用文献分析和历史考证的研究方法，以“积分方程的求解”为主线，以“为什么数学”为方法论指导，厘清各个主要相关数学家之间的思想传承以及他们的数学思想对近现代数学的影响，探讨对偶空间理论的形成与发展脉络，且更突出对偶空间思想的产生及发展过程，为更好地理解泛函分析学科的起源、建立和成熟提供一个视角，试图为近现代数学史的研究提供一个个案．同时对这段历史的探索也可为泛函分析的教学提供历史背景，使学生理解抽象数学概念与数学理论背后的具体问题的来源，从而促进学生更深刻地理解相关的数学知识．

① 曲安京．中国数学史研究范式的转换[J]．中国科技史杂志，2005, 26(1): 50-58.

第 2 章　希尔伯特的对偶思想

19 世纪是近代科学全面繁荣的世纪，人类文明在各个领域都取得了重大突破．英国物理学家和数学家麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879 年）建立了完整的电磁理论；英国化学家和物理学家道尔顿（John Dalton，1766—1844 年)提出了化学原子论;德国植物学家施莱登(Matthias Jakob Schleiden 1804—1881 年）阐释了生物细胞学……该世纪被称为是“科学的世纪”．与此同时，数学研究领域爆炸式扩张，伽罗瓦理论为代数学增添了活力，非欧几何对几何学产生了革命性的影响，法国数学家柯西（Augustin Louis Cauchy，1789—1857 年）为分析学注入了严密性……数学活动日益高涨．19 世纪的物理问题为数学研究提出了比以往任何一个世纪都多的思路和方向，由此直接或间接地产生了积分方程．但直到 19 世纪 80 年代,关于积分方程的一般理论仍被认为是“不可超越的困难”. 1896 年，沃尔泰拉提供了解决第二型积分方程的新方法，开创了积分方程一般理论的研究．

1900 年，瑞典数学家弗雷德霍姆发表了题为“求解狄利克雷问题的新方法”[①]一文，推广了沃尔泰拉求解第二型积分方程的方法，开创了积分方程研究的新局面．该文一经发表，在数学界就产生了持久而又深远的影响，几乎一夜之间，积分方程理论成为分析学家钟爱的课题之一[②].

图 2.1　希尔伯特

在此方面的集大成者为德国数学家希尔伯特（见图 2.1）. 希尔伯特 1880 年进入哥尼斯堡大学攻读数学，

① Fredholm I. Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet [J]. Œuvres completes: publiées sous les auspices de la Kungliga svenska vetenskapsakademien par l’Institut Mittag-Leffler, 1900: 61-68.

② Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 105.

1884 年取得博士学位后，留校任教．1895 年转入哥廷根大学任教授，此后一直在数学之乡哥廷根生活和工作．希尔伯特在开展积分方程工作之前，已经在代数数、代数不变式和几何基础方面取得了伟大成就，其在哥廷根大学组织的讨论班吸引了众多的年轻数学家围绕在其周围．也正是在希尔伯特的领导下，哥廷根大学成为当时世界数学研究的中心．1900—1901 年冬天，正是在希尔伯特的讨论班上，瑞典数学家霍尔姆格伦（Erik Albert Holmgren，1872—1943 年）报告了弗雷德霍姆关于积分方程的第一篇文章．希尔伯特敏锐地意识到弗雷德霍姆积分方程工作的开创性和重要性，在哥廷根组织的讨论班上集中对积分方程问题进一步研究，于 1904 年至 1906 年间，发表了一系列积分方程方面的论文．他的积分方程工作蕴含着丰富的、之后发展起来的泛函分析学的思想，如空间思想、算子思想等，促进了泛函分析学科的建立．在希尔伯特的推动下，积分方程理论成为 20 世纪前期的一大研究热门，直接促使泛函分析的产生与发展[①]．也正因为希尔伯特在积分方程方面的卓越功绩，他被认为是泛函分析理论的奠基人之一．泛函分析中的对偶空间思想即孕育在希尔伯特的积分方程相关工作中，本章我们主要分析他的与对偶空间思想密切相关的三篇论文来挖掘这一思想．

2.1　希尔伯特在有限线性方程组解理论中的对偶思想

2.1.1　有限线性方程组解理论历史的简单回顾

在 1900 年之前，有限线性方程组的解理论已比较完善，并且与矩阵、行列式、二次型等理论独立而又相互依赖地发展着．

瑞士数学家克莱姆（Gabriel Cramer，1704—1752 年）在 1750 年出版的《线性代数分析导言》[②]中，给出了现在以其名字命名的求解方程和未知数个数相同的且系数行列式不为零的线性方程组存在唯一解的法则——克莱姆法则．

19 世纪初，德国数学家高斯（Johann Carl Friedrich Gauss，1777—1855 年）

① 胡作玄．近代数学史[M]．济南：山东教育出版社，2006: 360.

② Cramer, Gabriel, Cramer frères & Philibert, et al. Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques par Gabriel Cramer [M]. chez les freres Cramer & Cl. Philibert, 1750.

在线性方程组中引入现称之为“高斯消元法”的一种系统的求解程序，由此产生了矩阵的思想[①]. 高斯是近代数学的奠基者之一，是历史上最重要的数学家之一，并享有“数学王子”的美誉. 高斯的这些思想在 18 世纪 50 年代被英国数学家西尔维斯特（James Joseph Sylvester，1814—1897 年）、凯莱（Arthur Cayley，1821—1895 年）和德国数学家弗罗贝尼乌斯（Ferdinand Georg Frobenius，1849—1917 年）系统发展，创立了矩阵及其特征值理论，而对称矩阵、正交矩阵及其相应特征值的刻画已为当时的数学家所熟知. 在此期间，矩阵理论与二次型理论交叉发展，人们已经认识到，一个二次型

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_{jk}x_j x_k$$

对应一个对称矩阵

$$(a_{jk})=\boldsymbol{U},$$

当 $\boldsymbol{U}$ 是实矩阵时，存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PUP}^{-1}$ 是一个实对角矩阵，这就等价于寻找变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的正交变换，使得二次型

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_{jk}x_j x_k$$

等价于

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j^2,$$

式中 λ_j 是对角矩阵 $\boldsymbol{PUP}^{-1}$ 中的对角元，或者说是 $\boldsymbol{U}$ 的特征根. 由此建立起线性方程组根的求解与相应矩阵变换之间的关系.

2.1.2 希尔伯特对有限线性方程组解理论的升华

在“求解狄利克雷问题的新方法”一文中，弗雷德霍姆求解第二型积分方程的方法是 n 等分区间 $[a,b]$，利用黎曼和，将积分方程

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{2-1-1}$$

（式中 K 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上有界且逐段连续的函数，f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，λ 是

① Kleiner I. History of linear algebra [M] //A History of Abstract Algebra. Birkhäuser Boston, 2007: 79-89.

一个复参数）转化为任意有限线性方程组

$$\varphi(s_j) - \frac{\lambda(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} K(s_j, s_k)\varphi(s_k) = f(s_j)\text{，}\ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2-1-2}$$

式中 $s_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$，$1 \leqslant j \leqslant n$.

进而他通过无限行列式理论给出了这类方程的解理论.

希尔伯特在 1904 年发表了其有关积分方程工作的第一篇文章“线性积分方程的一般理论”[①]，他的首要工作就是深化有限线性方程组的解理论，将隐含于弗雷德霍姆积分方程工作中的思想进一步明确化，其中所蕴含的深刻思想是其无限二次型理论和积分方程工作的基础. 对这部分工作的详细解读将有助于我们更好地理解其中所孕育的对偶思想.

在式（2-1-2）中，不妨设 $a = 0$，$b = 1$. 令

$$f_j = f(s_j)\text{，}\ K_{jk} = K(s_j, s_k)\text{，}\ \varphi_j = \varphi(s_j)\text{，}\ \mu = \frac{\lambda}{n}\text{，}$$

则该式转化为

$$\varphi_j - \mu\sum_{k=1}^{n} K_{jk}\varphi_k = f_j\text{，}\ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2-1-3}$$

作为 20 世纪一位著名的领头数学家，希尔伯特考虑问题的方式新颖而独特，他的创新之处在于，并没有按照前人求解有限线性方程组的方法求解方程组（2-1-3），而是给出了一种更一般的方法. 下面我们对这一过程进行还原.

希尔伯特引入（内积）记号

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\text{，}$$

式中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，将 n 个未知数视为一个向量整体，从而将方程组（2-1-3）视为 n 维实欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的向量方程，这样就将求 n 个未知数的问题转化为求一个未知向量的问题.

通过内积作用，方程组（2-1-3）等价转化为

① Hilbert D. Grundzüge einer allgeminen Theorie der linaren Integralrechnungen. (Erste Mitteilung) [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1904: 49-91.

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \mu \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} \rangle, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2-1-4}$$

式中，$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$，$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$.

由此，$\boldsymbol{\varphi}$ 是方程组（2-1-3）的解当且仅当对任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，式（2-1-4）成立.

令

$$d(\mu) = \begin{vmatrix} 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix},$$

则当 $d(\mu) \neq 0$ 时，由克莱姆法则得到方程组（2-1-3）解的唯一形式：

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ f_2 & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix}}{d(\mu)},$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n = \frac{\begin{vmatrix} 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & f_1 \\ -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & f_n \end{vmatrix}}{d(\mu)}.$$

由此，对任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \\ &= x_1\varphi_1 + \cdots + x_n\varphi_n \\ &= x_1 \frac{\begin{vmatrix} f_1 & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ f_2 & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix}}{d(\mu)} + \cdots + x_n \frac{\begin{vmatrix} 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & f_1 \\ -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & f_n \end{vmatrix}}{d(\mu)} \end{aligned}$$

$$
=(-1)\frac{\begin{vmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ f_2 & -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix}}{d(\mu)}+\cdots+
$$

$$
(-1)\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ f_1 & 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ f_2 & -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix}}{d(\mu)}
$$

$$
=(-1)\frac{\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ f_1 & 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ f_2 & -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix}}{d(\mu)}.
$$

因此，希尔伯特引入记号

$$
D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & 1-\mu K_{11} & -\mu K_{12} & \cdots & -\mu K_{1n} \\ y_2 & -\mu K_{21} & 1-\mu K_{22} & \cdots & -\mu K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & -\mu K_{n1} & -\mu K_{n2} & \cdots & 1-\mu K_{nn} \end{vmatrix}.
$$

在 $d(\mu)\neq 0$ 时，希尔伯特给出了方程组（2-1-3）解 $\boldsymbol{\varphi}$ 的一种等价形式

$$
\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}\rangle=-\frac{D(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{f})}{d(\mu)},\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,. \tag{2-1-5}
$$

该形式将方程组（2-1-3）的 n 个解视为一个整体向量，通过引入（内积）记号 $\langle\ \rangle$，使向量成对作用，给出了克莱姆法则的创新解释．内积可以帮助人们从几何的观点来研究函数空间，这一从整体上成对作用给出解的等价形式的方法，在从有限向无限过渡时起关键作用．

实际上，在弗雷德霍姆的文章“求解狄利克雷问题的新方法”中，也出现了

记号 $D(\mu,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，但他只是给出了这一形式的巧妙应用，其来源却无从探究.

本质上，方程组(2-1-3)是一个求点的问题，希尔伯特将其等价转化为式(2-1-4)，而式（2-1-4）是一个关于变量 $\boldsymbol{x}$ 的恒等式，对应的是一条线的解析表达式．因此希尔伯特实际上将点的存在性问题转化为线的存在性问题，这一思想与 19 世纪初射影几何中“点”与“线”的对偶思想①非常相似，标志着泛函分析中对偶思想的萌芽.

接下来，希尔伯特考虑了 $d(\mu)=0$ 的情形.

为了更好地讨论方程组（2-1-3）解的结构，他加入限制条件：K 是对称函数，即 $K(s,t)=K(t,s)$．这时对应方程组（2-1-3）的矩阵 $\boldsymbol{K}=(K_{j,k})$ 是实对称矩阵.

设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的 n 个互不相同的特征根，由已有的矩阵理论，这 n 个特征根分别对应 n 个互不相同的特征向量 $\boldsymbol{\varphi}^1,\boldsymbol{\varphi}^2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}^n$，即 $\boldsymbol{\varphi}^k=(\varphi_1^k,\varphi_2^k,\cdots,\varphi_n^k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 是方程组（2-1-3）相对应的齐次方程组

$$\varphi_j-\mu\sum_{k=1}^{n}K_{jk}\varphi_k=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n \tag{2-1-6}$$

的解．那么对于特征根 μ_k 以及相应的特征向量 $\boldsymbol{\varphi}^k$，能否建立与式（2-1-5）相应的等式呢？

通过进一步分析，希尔伯特得到：对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，有

$$\frac{D(\mu_k;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{d'(\mu_k)}=\mu_k\frac{\langle\boldsymbol{\varphi}^k,\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{\varphi}^k,\boldsymbol{y}\rangle}{\langle\boldsymbol{\varphi}^k,\boldsymbol{\varphi}^k\rangle}. \tag{2-1-7}$$

将 $\dfrac{D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{d(\mu)}$ 视为关于 μ 的有理函数，利用有理函数的部分分解法则，得到 $\dfrac{D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{d(\mu)}$ 的分解形式

① 事实上，对偶的思想体现在法国数学家彭塞列（Jean-Victor Poncelet，1788—1867 年）1826 年的论文中，由此他奠定了射影几何学的基础．对偶思想是近现代数学中最基本的概念之一，它反映了许多数学对象之间的对称性质．在平面几何中，点和线称为对偶元素．过一点画一条直线和在一条直线上标出一个点称为对偶运算．两个图形，如果一个可以从另一个把其中的元素和运算替换为对偶的元素和运算而达到，就称为对偶的．两个定理，若一个定理中的所有元素和运算替换为对偶的就形成为另一个定理时，则称为对偶的.

$$\frac{D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{d(\mu)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{D(\mu_k;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{d'(\mu_k)(\mu-\mu_k)}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\frac{\left\langle\boldsymbol{\varphi}^k,\boldsymbol{x}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{\varphi}^k,\boldsymbol{y}\right\rangle}{\left\langle\boldsymbol{\varphi}^k,\boldsymbol{\varphi}^k\right\rangle(\mu-\mu_k)}, \tag{2-1-8}$$

并称 $\dfrac{D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{d(\mu)}$ 为 $\boldsymbol{K}$ 的预解式.

在以上对有限线性方程组解理论重新阐释的基础上，与弗雷德霍姆从有限过渡到无限的思想相同，希尔伯特也通过“极限过渡”，结合无限行列式理论，得到关于积分方程（2-1-1）平行于有限线性方程组（2-1-3）的式（2-1-5）和式（2-1-8）的结论.

为了更好地在后续章节分析并比较希尔伯特关于积分方程（2-1-1）求解过程前后思想的本质不同，我们先还原其在这篇文章“极限过渡”思想中的一种简单情形，即类似于有限线性方程组行列式不为零从而得到平行于式（2-1-5）结论的情形.

对于积分方程（2-1-1），利用黎曼积分和转化为有限线性方程组（2-1-2），不失一般性，令 $a=0,b=1$，又转化为方程组（2-1-3），此时方程组（2-1-3）的系数行列式为 $d(\mu)$，其中 $\mu=\dfrac{\lambda}{n}$.

由科克公式，

$$d(\mu)=1+(-\mu)\sum_{i=1}^{n}K_{ii}+\frac{(-\mu)^2}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{vmatrix}+\frac{(-\mu)^3}{3!}\sum_{i,j,k}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij} & K_{ik}\\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk}\\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk}\end{vmatrix}+\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}d\left(\frac{\lambda}{n}\right)=\delta(\lambda),$$

式中，

$$\delta(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n d_n\lambda^n,$$

$$d_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1\left[\left\{K\left(s_i,s_j\right)\right\}\right]\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n,$$

$\left[\left\{K(s_i,s_j)\right\}\right]$ 表示 $n\times n$ 矩阵 $\left\{K(s_i,s_j)\right\}_{i,j=1}^{n}$ 的行列式．$\delta(\lambda)$ 称为积分方程（2-1-1）的行列式.

将 $D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 视为关于 μ 的函数，则 $D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是关于 μ 的多项式函数，由

$$D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=0}^{n}\frac{D^{(j)}(0;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{j!}\mu^{j}$$

得

$$D(\mu;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!}D_{j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mu^{j-1}\ ,$$

式中，

$$D_{j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_j}\begin{vmatrix}0 & x_{k_1} & x_{k_2} & \cdots & x_{k_j}\\ y_{k_1} & K_{k_1k_1} & K_{k_1k_2} & \cdots & K_{k_1k_j}\\ y_{k_2} & K_{k_2k_1} & K_{k_2k_2} & \cdots & K_{k_2k_j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{k_j} & K_{k_jk_1} & K_{k_jk_2} & \cdots & K_{k_jk_j}\end{vmatrix}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{j}}D_{j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & x(s_1) & x(s_2) & \cdots & x(s_j)\\ y(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ y(s_2) & K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \cdots & K(s_2,s_j)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ y(s_j) & K(s_j,s_1) & K(s_j,s_2) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_j\ ,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}D\left(\frac{\lambda}{n};\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!}D_{j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\lambda^{j-1}}{n^{j}}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\Delta_{j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\lambda^{j-1},\end{aligned}$$

式中，

$$\Delta_{j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{j!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & x(s_1) & x(s_2) & \cdots & x(s_j)\\ y(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ y(s_2) & K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \cdots & K(s_2,s_j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y(s_j) & K(s_j,s_1) & K(s_j,s_2) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_j\ ,$$

记$\Delta(\lambda;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\Delta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\lambda^{j-1}$.

设$\delta(\lambda)\neq 0$，则当n充分大时，有$d\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)\neq 0$. 因此由式（2-1-5），对任意$\boldsymbol{x}=(x(s_1),x(s_2),\ \cdots,x(s_n))$，有

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}\rangle=-\frac{D\left(\dfrac{\lambda}{n};\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}\right)}{d\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)},$$

式中$\boldsymbol{\varphi}=\left(\varphi(s_1),\varphi(s_2),\cdots,\varphi(s_n)\right)$，$\boldsymbol{f}=\left(f(s_1),f(s_2),\cdots,f(s_n)\right)$. 上式两边同乘$\dfrac{1}{n}$，令$n\to\infty$，则由黎曼积分定义，左边得

$$\int_0^1 x(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

而由前面的说明分析右边得

$$-\frac{\Delta(\lambda;\boldsymbol{x},\boldsymbol{f})}{\delta(\lambda)}.$$

特别地，令

$$x(s)=K(t,s),$$

则有

$$\int_0^1 K(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=-\frac{\Delta(\lambda;K(t,),\boldsymbol{f})}{\delta(\lambda)}.$$

令

$$\phi(t)=f(t)+\left(-\lambda\frac{\Delta(\lambda;K(t,),\boldsymbol{f})}{\delta(\lambda)}\right),$$

下面分析还原说明$\phi(t)$是积分方程（2-1-1）的解.

由行列式按一列展开有

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}K(t,\xi) & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underset{\xi=s_{j+1}}{=}(-1)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & K(t,s_2) & \cdots & K(t,s_{j+1})\\ 0 & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & K(s_j,s_1) & K(s_j,s_2) & \cdots & K(s_j,s_{j+1})\\ f(s_{j+1}) & K(s_{j+1},s_1) & K(s_{j+1},s_2) & \cdots & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{j+1},$$

故

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & K(t,s_2) & \cdots & K(t,s_{j+1})\\ f(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_{j+1})\\ f(s_2) & K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \cdots & K(s_2,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(s_{j+1}) & K(s_{j+1},s_1) & K(s_{j+1},s_2) & & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{j+1}$$

$$=(-1)(j+1)\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}K(t,\xi) & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi.$$

因此

$$\Delta(\lambda;K(t,),\boldsymbol{f})$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\Delta_j(K(t,),f)\lambda^{j-1}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\lambda^{j-1}\frac{1}{j!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & K(t,s_2) & \cdots & K(t,s_j)\\ f(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ f(s_2) & K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \cdots & K(s_2,s_j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(s_j) & K(s_j,s_1) & K(s_j,s_2) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j$$

$$=-\int_0^1K(t,s)f(s)\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\lambda^j\frac{1}{(j+1)!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & K(t,s_2) & \cdots & K(t,s_{j+1})\\ f(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_{j+1})\\ f(s_2) & K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \cdots & K(s_2,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(s_{j+1}) & K(s_{j+1},s_1) & K(s_{j+1},s_2) & \cdots & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}$$

$$\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{j+1}$$

$$=-\int_0^1 K(t,s)f(s)\mathrm{d}s+$$

$$(-1)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\lambda^j\frac{1}{j!}\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}K(t,\xi) & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi\,.$$

另一方面，

$$\int_0^1 K(t,s)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}K(s,\xi) & K(s,s_1) & \cdots & K(s,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s$$

$$\underset{s=s_{j+1}}{=}(-1)^j\int_0^1\cdots\int_0^1 K(t,s_{j+1})\begin{vmatrix}K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\\ K(s_{j+1},\xi) & K(s_{j+1},s_1) & \cdots & K(s_{j+1},s_j)\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}s_{j+1}\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underset{s=s_{j+1}}{=}(-1)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & K(t,s_{j+1})\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j) & K(s_1,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j) & K(s_j,s_{j+1})\\ K(s_{j+1},\xi) & K(s_{j+1},s_1) & \cdots & K(s_{j+1},s_j) & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}s_{j+1}\,\mathrm{d}\xi,$$

注意到积分与积分变量记号的无关性，在上式最右边的式子中，交换后两列和后两行，然后交换 s_j 和 s_{j+1}，又会得到

$$\int_0^1 K(t,s)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}K(s,\xi) & K(s,s_1) & \cdots & K(s,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s$$

$$=(-1)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & K(t,s_j) & 0\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j) & K(s_1,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j) & K(s_j,s_{j+1})\\ K(s_{j+1},\xi) & K(s_{j+1},s_1) & \cdots & K(s_{j+1},s_j) & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}s_{j+1}\,\mathrm{d}\xi$$

因此，有

$$(j+1)\int_0^1 K(t,s)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}K(s,\xi) & K(s,s_1) & \cdots & K(s,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s$$

$$=(-1)\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j) & K(t,s_{j+1})\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j) & K(s_1,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j) & K(s_j,s_{j+1})\\ K(s_{j+1},\xi) & K(s_{j+1},s_1) & \cdots & K(s_{j+1},s_j) & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}s_{j+1}\,\mathrm{d}\xi.$$

故

$$\int_0^1 K(t,s)\Delta(\lambda,K(s,),\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}s$$

$$=-\int_0^1\int_0^1 K(t,s)K(s,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s+$$

$$(-1)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\lambda^j\frac{1}{j!}\int_0^1 K(t,s)\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}K(s,\xi) & K(s,s_1) & \cdots & K(s,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s$$

$$=-\int_0^1\int_0^1 K(t,s)K(s,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\lambda^j\frac{1}{(j+1)!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j) & K(t,s_{j+1})\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j) & K(s_1,s_{j+1})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j) & K(s_j,s_{j+1})\\ K(s_{j+1},\xi) & K(s_{j+1},s_1) & \cdots & K(s_{j+1},s_j) & K(s_{j+1},s_{j+1})\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}s_{j+1}\,\mathrm{d}\xi$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\lambda^{j-1}\frac{1}{j!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j) & K(t,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j) & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ K(s_{j-1},\xi) & K(s_{j-1},s_1) & \cdots & K(s_{j-1},s_{j-1}) & K(s_{j-1},s_j)\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_{j-1}) & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi,$$

综合以上得

$$\Delta(\lambda;K(t,),\boldsymbol{f})+\int_0^1K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s\,\delta(\lambda)-\lambda\int_0^1K(t,s)\Delta(\lambda;K(s,),f)\,\mathrm{d}s$$

$$=-\int_0^1K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s+$$

$$(-1)\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\lambda^j\frac{1}{j!}\int_0^1\cdots\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}K(t,\xi) & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi+$$

$$\int_0^1K(t,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j!}\lambda^j\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\right)+$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\lambda^j\frac{1}{j!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & K(t,s_1) & \cdots & K(t,s_j) & K(t,s_j)\\ K(s_1,\xi) & K(s_1,s_1) & \cdots & K(s_1,s_j) & K(s_1,s_j)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ K(s_{j-1},\xi) & K(s_{j-1},s_1) & \cdots & K(s_{j-1},s_{j-1}) & K(s_{j-1},s_j)\\ K(s_j,\xi) & K(s_j,s_1) & \cdots & K(s_j,s_{j-1}) & K(s_j,s_j)\end{vmatrix}$$

$$f(\xi)\,\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_j\,\mathrm{d}\xi$$

$$=0,$$

因此，有

$$\phi(t)-\lambda\int_0^1K(t,s)\phi(s)\,\mathrm{d}s$$

$$=f(t)-\lambda\frac{\Delta(\lambda,K(t,),\boldsymbol{f})}{\delta(\lambda)}-\lambda\int_0^1K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s+\lambda^2\int_0^1K(t,s)\frac{\Delta(\lambda,K(s,),\boldsymbol{f})}{\delta(\lambda)}\,\mathrm{d}s$$

$$= f(t) - \lambda \frac{\Delta(\lambda, K(t,), \boldsymbol{f}) + \int_0^1 K(t,s) f(s) \mathrm{d}s \, \delta(\lambda) - \lambda \int_0^1 K(t,s) \Delta(\lambda, K(s,), \boldsymbol{f}) \mathrm{d}s}{\delta(\lambda)}$$

$$= f(t).$$

这表明当$\delta(\lambda) \neq 0$时，$\phi(t)$即为积分方程（2-1-1）的解．即有如下结论．

【定理 2.1】对于积分方程(2-1-1)，其中$f(s)$，$K(s,t)$分别是$[a,b]$和$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，则当$\delta(\lambda) \neq 0$时，存在唯一解

$$\phi(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s) \varphi(s) \mathrm{d}s.$$

虽然以上推导过程烦琐冗长，但其主要思想还是利用无限行列式理论，对于有限线性方程组（2-1-3）解的形式（2-1-5）取极限得到积分方程（2-1-1）的解的形式．

尽管希尔伯特在其积分方程工作的第一篇文章中求解有限线性方程组时引入内积，这一过程已经蕴含了有限维空间中的对偶思想，但在该文中，他并没有直接将这种对偶思想延伸到积分方程所隐含的无限维空间中，他对积分方程（2-1-1）的处理依旧是“从有限极限过渡到无限”的方式，直到其第五篇有关积分方程工作文章①的发表，才摆脱了极限的束缚．而矩阵理论与二次型理论之间的转化是促使希尔伯特的工作向无限维空间迈进的重要桥梁．

2.2　希尔伯特在积分方程解理论中的对偶思想

在 2.1 节，我们挖掘了希尔伯特第一篇积分方程文章中有限线性方程组求解理论所蕴含的对偶思想．本节主要通过分析其第四篇和第五篇积分方程工作的文章，进一步深入探析他的积分方程求解理论中蕴含的对偶思想，感受其思想精髓．

2.2.1　希尔伯特对有限二次型的解释

在第一篇积分方程工作的文章中，希尔伯特除了在有限线性方程组的解理论中引入对偶思想，同时还利用对称矩阵与二次型之间的联系，重新阐释了二次型

① Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Fünfte Mitteilung[J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1906: 439-480.

的约化理论.

对每个实二次型

$$\sum_{j,k=1}^{n} K_{jk} x_j x_k ,$$

记其所对应的实对称矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个不同的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量①．令

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1\\ \boldsymbol{\varphi}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varphi}_n\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{U}$ 是一个正交矩阵．若令

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

则

$$\sum_{j,k=1}^{n} K_{jk} x_j x_k=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j} y_j^2 .$$

这一过程称为二次型的约化，每个实二次型都可通过变量之间的正交变换约化为一个主轴形式.

希尔伯特从其发展的有限线性方程组的解理论出发，在式（2-1-8）中令 $\mu=0$，由 $d(0)=1$ 以及 $D(0;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$，得到恒等式

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{k=1}^{n}\frac{\langle \boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_k\rangle}. \tag{2-2-1}$$

同时希尔伯特对双线型

$$\sum_{j,k=1}^{n} K_{jk} x_j y_k , \tag{2-2-2}$$

利用内积记号分离为 $\langle \boldsymbol{Kx},\boldsymbol{y}\rangle$，即

① 在希尔伯特时代，λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根指的是 $\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{A}$ 不可逆，与现代特征根的定义稍有不同.

$$\sum_{j,k=1}^{n} K_{jk} x_j y_k = \langle \boldsymbol{Kx}, \boldsymbol{y} \rangle .$$

当 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵时，由式（2-2-1）得

$$\langle \boldsymbol{Kx}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\langle \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{y} \rangle}{\langle \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle}, \tag{2-2-3}$$

特别地，令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，得

$$\langle \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\langle \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{x} \rangle^2}{\langle \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle}. \tag{2-2-4}$$

这实际上对应的就是二次型的约化．式（2-2-4）将二次型与其特征根、特征向量通过等式联系起来，这种对二次型的处理方式使得从有限过渡到无限成为可能．特别地，平行于式（2-2-3），希尔伯特得到下面的重要结论．

【定理 2.2】 设 $K(s,t)$ 是关于 s 和 t 的对称连续函数，$\varphi_k(s)$ 是积分方程（2-1-1）的特征根 $\lambda^{(k)}$ 所对应的正规特征函数．对任意连续函数 $x(s)$ 和 $y(s)$，成立

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t) x(s) y(t) \,\mathrm{d}\, s \,\mathrm{d}\, t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{(k)}} \int_a^b \varphi_k(s) x(s) \,\mathrm{d}\, s \int_a^b \varphi_k(s) y(s) \,\mathrm{d}\, s, \tag{2-2-5}$$

且上式右边对所有满足条件

$$\int_a^b x(s)^2 \,\mathrm{d}\, s < \infty, \quad \int_a^b y(s)^2 \,\mathrm{d}\, s < \infty$$

的函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 一致且绝对收敛．

将式（2-2-5）左边按照二重黎曼积分和的形式展开得到

$$\sum_{j,k=1}^{n} K(s_j, t_k) x(s_j) y(t_k) \Delta_{jk}, \tag{2-2-6}$$

式中 Δ_{jk} 表示区域 $[a,b]\times[a,b]$ 的分割面积．

式（2-2-2）与式（2-2-6），式（2-2-3）与式（2-2-5）的分别对应以及相似性使希尔伯特认识到有限二次型理论向无限推广的可能性，以及发展无限二次型理论在积分方程中的重要性．这一认识在其积分方程工作的第四篇文章[①]中得到实现，无限二次型理论得到系统研究．

① Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1906: 157-228.

2.2.2　l^2 空间及其上连续线性泛函的引入

希尔伯特在关于积分方程工作的第四篇文章中，首先将其第一篇文章中关于有限线性方程组的结论平行放在有限二次型的框架里，在此基础上，系统研究和发展了无限二次型理论，将对称矩阵的特征根推广，开创了算子的谱理论，对于无限二次型得到了类似式（2-2-4）的约化形式．我们对此先做一分析．

令

$$K(\boldsymbol{x})=\sum_{j,k=1}^{\infty}k_{jk}x_jx_k\ ,\tag{2-2-7}$$

式中 $k_{jk}=k_{kj}$， $K(\boldsymbol{x})$ 称为关于 $x_1,x_2,\cdots$ 的二次型．

记 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=x_1^2+x_2^2+\cdots$．

最初，希尔伯特并没有对二次型式（2-2-7）加以条件限制，该式的意义还不明确，也没有明确指出该式右端的收敛性以及 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$ 右端的收敛性，在一定程度上，这也与希尔伯特试图建立“一般化，统一化”理论的思想相关．但为了充分利用其发展的有限二次型理论，实现从有限到无限的过渡，他对式（2-2-7）做任意截断后，有限二次型

$$K_n(\boldsymbol{x})=\sum_{j,k=1}^{n}k_{jk}x_jx_k$$

所对应矩阵的特征根附加限制条件：一致有界．由此得到二次型 K 所确定的“预解型” $\overline{K}$ 的形式

$$\overline{K}(\lambda:\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\sum_p E_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1}+\int_s\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\mathrm{d}\sigma(\mu)\ ,$$

式中 $\lambda_p, p=1,2,\cdots$ 是 K 的点谱，E_p 是 λ_p 所对应的特征型，s 是 K 的连续谱．$\overline{K}$ 是相应有限维情形中式（2-1-8）的推广．

为了实现从 $\overline{K}$ 的形式到 K 的约化形式，希尔伯特引入了有界双线型的概念．

【定义】对任意变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$， $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$，且 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\leqslant 1$，$\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle\leqslant 1$，双线型

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j,k=1}^{\infty}\alpha_{jk}x_jy_k$$

一致有界，则称 $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为有界双线型.

在该定义中，希尔伯特强调了双线型有界的限制条件 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \leqslant 1$，$\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \leqslant 1$，用现在的数学语言来说，他首次明确了其所讨论二次型中无穷变量 x 的范围——l^2 空间.

紧接着，希尔伯特指出“有界”的概念可以适用于无穷变量线型

$$L(\boldsymbol{x}) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots. \tag{2-2-8}$$

并通过下面的两个事实：

Ⅰ. $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle^2 \leqslant \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle$，

Ⅱ. 若对任意 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \leqslant 1$，$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\rangle \leqslant M$，则 $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle \leqslant M^2$，

说明 $L(\boldsymbol{x})$ 有界的充要条件是 $l_1^2 + l_2^2 + \cdots$ 有界，且有界无穷变量线型 $L(\boldsymbol{x})$ 可视为 $\boldsymbol{x}$ 的函数.

在此，希尔伯特又给出了（l^2 上的）连续（泛）函数 $F(x_1, x_2, \cdots)$ 的确切定义.

【定义】（l^2 上泛）函数 $F(x_1, x_2, \cdots)$ 在 $a_1, a_2, \cdots$ 处连续，若

$$\lim_{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \cdots \to 0} F\left(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots\right) = F\left(a_1, a_2, \cdots\right).$$

然后，希尔伯特指出有界线型 $L(\boldsymbol{x})$ 是（l^2 上的）连续函数.

这是关于线性泛函有界和连续关系的最早表述.

虽然现在我们知道 l^2 上的有界线性泛函都具有式（2-2-8）的形式，且有界线性泛函与连续线性泛函是等价的，但从以上分析可以看到，首先希尔伯特还没有明确的空间概念；其次希尔伯特并没有表明（l^2 上的）有界线性泛函一定具有式（2-2-8）的形式，而是给出了无限线性型有界的概念；同样，希尔伯特给出的是（l^2 上的）连续函数的定义，不是连续线性泛函的定义；希尔伯特只是说明具有式（2-2-8）的形式的有界线型是连续的.

在这篇文章中，希尔伯特实际上将向量（或算子）普遍线性化（或双线性化），如他所引入的双线型之间的作用、双线型与线型之间的作用实际上分别对应算子之间的作用，以及算子对向量的作用．虽然向量与线型的等价性中蕴含着深刻的对偶思想，但完全的线性化也掩盖了这一思想．直到里斯建立了 l^2 和 L^2 之间的同构并给出 L^2 上连续线性泛函的表示之后，这一本质思想才显现出来.

在有界的条件下，希尔伯特给出了有界无限二次型的约化定理.

【**定理 2.3**】设 $K(x)$ 是有界二次型，则

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{E_p}{\lambda_p}+\int_s\frac{\mathrm{d}\sigma(\mu)}{\mu}, \tag{2-2-9}$$

式中 $\lambda_p, p=1,2,\cdots$ 是 K 的点谱，E_p 是 λ_p 所对应的特征型，且是（l^2 上的）非负有界线型．s 是 K 的连续谱，$\sigma(\mu)$ 是（l^2 上的）有界线型．

为了使式（2-2-9）更接近于有限二次型的约化形式，希尔伯特进一步加强二次型的限制条件，引入了完全连续二次型的概念，并利用线型定义了正交系，推广有限情形的正交变换．

【**定义**】设

$$\begin{aligned}L_1(\boldsymbol{x})&=l_{11}x_1+l_{12}x_2+\cdots\\L_2(\boldsymbol{x})&=l_{21}x_1+l_{22}x_2+\cdots\\&\vdots\end{aligned} \tag{2-2-10}$$

表示任何（有限或无限）线型，其系数若满足

$$\begin{aligned}L_p(.)L_p(.)&=\sum_r l_{pr}^2=1\\L_p(.)L_q(.)&=\sum_r l_{pr}l_{qr}=1\end{aligned} \tag{2-2-11}$$

则称式（2-2-10）为正交线型系．

正交线型系的定义表明，希尔伯特是将向量以及向量的（内积）作用通过线型的形式表达的，这也说明了在其工作中向量与线型的无区别化．

在这篇文章最后，希尔伯特回到其初衷，将二次型理论应用到无穷线性方程组的求解问题中，给出了绝对连续二次型对应的无穷线性方程组的解理论．

【**定理 2.4**】设 $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{(p,q)}a_{pq}x_py_q$ 是关于无穷变量 $x_1,x_2,\cdots$，$y_1,y_2,\cdots$ 的绝对连续双线型，则无穷线性方程组

$$\begin{aligned}(1+a_{11})x_1+a_{12}x_2+\cdots&=a_1\\a_{21}x_1+(1+a_{22})x_2+\cdots&=a_2\\&\vdots\end{aligned} \tag{2-2-12}$$

或者对所有 $\{a_p\}$ 且 $\sum_p a_p^2<\infty$ 存在唯一解；或者所对应的齐次线性方程组

$$\begin{aligned}(1+a_{11})x_1+a_{12}x_2+\cdots&=0\\a_{21}x_1+(1+a_{22})x_2+\cdots&=0\\&\vdots\end{aligned}$$

存在解 $\{x_p\}$ 且 $\sum_p x_p^2 = 1$.

希尔伯特积分方程工作的第四篇文章包含着丰富的原创理论和思想，迪厄多内称该文“从思想的深度和新度而言，是泛函分析史上的转折点，真正称得上是泛函分析学科的第一篇文章”①. 希尔伯特的学生施密特将希尔伯特无穷线性方程组的工作推广、严密抽象化，从解的条件出发来考察无穷线性方程组本身，由此建立了 l^2 上的几何空间结构理论.

1908 年，施密特发表“无穷变量线性方程组的求解”②一文，在该文的第一章，他将 l^2 空间中的向量视为定义在正整数集上满足绝对值平方和收敛的函数，并采用记号 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ 表示 $\sum_{x=1}^{\infty} A(x)B(x)$，这即为现代内积定义的雏形③；引入范数 $\|\boldsymbol{A}\| = \langle \boldsymbol{A}, \overline{\boldsymbol{A}} \rangle = \sum_{x=1}^{\infty} |A(x)|^2$；定义正交性④；得到庞德雅利金定理的推广⑤；得到贝塞尔不等式⑥，并将贝塞尔不等式推广到可数个的情形；得到施瓦兹不等式⑦；给出范数的三角不等式性⑧；定义了强收敛⑨；得到表明 l^2 是完备的收敛定理；给出了有限向量的规范正交化过程；建立了投影定理⑩.

可以说，施密特已经建立了较完全的平方可和数列的空间理论. 1910 年，里斯采用数列的形式替换了施密特函数的形式，采用记号 l^2，并称之为希尔伯特空间.

---

① Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981：110.

② Schmidt E. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 1908, 25(1): 53-77.

③ 现在内积定义为 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \sum_{x=1}^{\infty} A(x)\overline{B(x)}$.

④ $\langle \boldsymbol{A}, \overline{\boldsymbol{B}} \rangle = 0$，称 $A(x)$ 和 $B(x)$ 是正交的.

⑤ 设 $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ 互相正交，记 $C_1(x)+C_2(x)+\cdots+C_n(x)=D(x)$，则 $\|\boldsymbol{D}\|^2 = \|C_1\|^2 + \|C_2\|^2 + \cdots + \|C_n\|^2$.

⑥ 设 $B_1(x), B_2(x), \cdots, B_m(x)$ 是规范互相正交的，对任意 $F(x)$，$\|\boldsymbol{F}\|^2 \geqslant \sum_{v=1}^{m} \left|\langle \boldsymbol{F}, \overline{\boldsymbol{B}_v} \rangle\right|^2$.

⑦ $\|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{G}\| \geqslant |\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \rangle|$.

⑧ $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$.

⑨ 一个无限序列 $D_1(x), D_2(x), \cdots, D_n(x), \cdots$ 强收敛于 $D(x)$，若 $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{D}_n - \boldsymbol{D}\| = 0$.

⑩ 设 $\mathcal{A}$ 是由 $A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x), \cdots$ 生成的闭子空间，$D(x)$ 是任一函数，则 $D(x)$ 可分解为 $\mathcal{A}$ 中元和 $\mathcal{A}$ 的正交补中元之和.

2.2.3　积分方程的代数化

希尔伯特在其积分方程工作的第一篇文章中，利用无限行列式理论给出了积分方程（2-1-1）解的理论．随着他对无限二次型理论的研究，积分方程与二次型理论之间的相似性更为明显，希尔伯特不再依赖于黎曼积分和将积分方程转化为有限线性方程组，而是找到了一种全新的求解第二型积分方程的方法——积分方程的完全代数化，开创了直接处理无限维空间上方程问题的新思路．

在建立无限二次型理论的第四篇文章的前言中，希尔伯特提到他找到了一种建立在无穷变量二次型理论基础上的处理积分方程的新方法．

实际上，在其积分方程工作的第一篇文章中，希尔伯特已得到积分方程（2-1-1）在 $K(s,t)$ 对称条件下特征函数的正交性等性质，并给出了每个可表示为形式

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)\,\mathrm{d}t \tag{2-2-13}$$

的函数 f 关于对称核 $K(s,t)$ 的特征函数 $\{\varphi_n\}$ 的级数形式

$$f(s)=\sum c_n\varphi_n(s)\,, \tag{2-2-14}$$

式中 $c_n=\int_a^b f(s)\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s$ ，且该级数一致收敛，满足等式

$$\int_a^b f(s)^2\,\mathrm{d}s=\sum c_n^2. \tag{2-2-15}$$

尽管该结论未给出所有连续函数类似于式(2-2-14)的分解形式，但式(2-2-14)和式（2-2-5）使得希尔伯特认识到函数级数的展开式不仅能应用到微分方程中，而且是建立积分方程理论的基础．因此，希尔伯特的想法是通过积分方程建立关于未知函数级数展开式系数的无穷线性方程组，通过无穷线性方程组理论确定系数，从而反过来求解积分方程中的未知函数．这一想法在其积分方程工作的第五篇文章中得到实现．

1906 年，希尔伯特发表了积分方程工作的第五篇文章，文中他首先给出完备规范正交（函数）系的定义．

若连续函数系 $\{\Phi_p\}$ 满足如下条件：

Ⅰ．正交： $\int_a^b \Phi_p(s)\Phi_q(s)\,\mathrm{d}s=\delta_{p,q}=\begin{cases}0, & p\neq q\\ 1, & p=q\end{cases}$ ，

Ⅱ. 完备：对任意 $f,g\in C[a,b]$，

$$\int_a^b f(s)g(s)\,\mathrm{d}s=\sum_{p=1}^{\infty}\int_a^b f(s)\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s\int_a^b g(s)\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s,$$

则称 $\{\Phi_p\}$ 为（$C[a,b]$ 中的）完备规范正交系. 其中 $\{\Phi_p\}$ 的完备性保证了对 $[a,b]$ 上任意两个连续函数 f,g，若

$$\int_a^b f(s)\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^b g(s)\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s,\ \ p=1,2,\cdots,$$

则

$$f=g.$$

这一结论在将积分方程代数化之后再返回到积分方程时起重要作用. 同时希尔伯特解决了不依赖于特征函数的正交系的存在性问题，表明 $[a,b]$ 上的连续函数（空间）中都存在完备规范正交（函数）系.

与其在第一篇文章中对有限线性方程组等价转化的对偶思想相似，希尔伯特还是运用内积这一处理方式，下面对这一过程进行还原.

希尔伯特利用完备规范正交函数系将 $C[a,b]$ 上的积分方程（2-1-1）（取 $\lambda=1$）转化为

$$\left\langle \Phi_p(s),f(s)\right\rangle=\left\langle \Phi_p(s),\varphi(s)\right\rangle+\left\langle \Phi_p(s),\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right\rangle,\ \ p=1,2,\cdots. \tag{2-2-16}$$

用积分形式表示，即为

$$\int_a^b \Phi_p(s)f(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^b \Phi_p(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s+\int_a^b \Phi_p(s)\left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s,\ \ p=1,2,\cdots.$$

因为 $\{\Phi_p\}$ 完备，有

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{q=1}^{\infty}\int_a^b K(s,t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_a^b \Phi_p(s)\left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\\=&\sum_{q=1}^{\infty}\int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\,\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s\\=&\sum_{q=1}^{\infty}\int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令

$$a_p = \left\langle \Phi_p(s), f\left(s\right) \right\rangle = \int_a^b \Phi_p(s) f(s) \mathrm{d}s\,,$$

$$x_p = \left\langle \Phi_p(s), \varphi\left(s\right) \right\rangle = \int_a^b \Phi_p(s) \varphi(s) \mathrm{d}s\,,$$

$$\alpha_{p,q} = \int_a^b \int_a^b K\left(s,t\right) \Phi_p(s) \Phi_q\left(t\right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,,$$

则式（2-1-1）转化为关于未知量 $\{x_p\}$ 的无穷线性方程组

$$a_p = x_p + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} x_q, \qquad p = 1, 2, \cdots. \tag{2-2-17}$$

由 $\{\Phi_p\}$ 的完备性和 f 的连续性，可得

$$\begin{aligned}\sum_p a_p{}^2 &= \sum_p \left(\int_a^b \Phi_p(s) f(s) \mathrm{d}s \right)^2 \\ &= \int_a^b f^2(s) \mathrm{d}s < \infty.\end{aligned}$$

同理可得，所求解 $\{x_p\}$ 也满足条件

$$\sum_p x_p^2 < \infty\,.$$

又因为 $K(s,t)$ 具有连续性，从而

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s,t) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty\,,$$

希尔伯特表明由 $K(s,t)$ 确定的系数 $\{\alpha_{pq}\}$ 所对应的双线型是完全连续的．这表明无穷线性方程组（2-2-17）完全满足定理 2.4 中的条件，因此由定理 2.4 可知方程组（2-2-17）或者存在唯一解，或者所对应的齐次线性方程组存在非零解．

下面我们通过方程组（2-2-17）存在唯一解来说明积分方程（2-1-1）在 $C[a,b]$ 中存在唯一解．

设无穷线性方程组（2-2-17）存在唯一解 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，即有

$$a_p = \alpha_p + \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{pq} \alpha_q, \qquad p = 1, 2, \cdots. \tag{2-2-18}$$

令

$$K_p(s) = \int_a^b K(s,t) \Phi_p(t) \mathrm{d}t\,,$$

则 $K_p(s)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且由 $\{\Phi_p\}$ 的完备性得

$$\sum_p {K_p}^2(s) = \int_a^b K^2(s,t)\,\mathrm{d}t < \infty .$$

由施瓦兹不等式，有

$$\left|\sum_p \alpha_p K_p(s)\right| \leqslant \sqrt{\sum_p {\alpha_p}^2}\sqrt{\sum_p {K_p}^2(s)} < \infty ,$$

因此 $\sum_p \alpha_p K_p(s)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，设

$$\alpha(s) = \sum_p \alpha_p K_p(s) ,$$

则 $\alpha(s)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

令

$$\psi(s) = f(s) - \alpha(s) ,$$

则

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Phi_p(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s &= \int_a^b \Phi_p(s)\big(f(s)-\alpha(s)\big)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b \Phi_p(s) f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s)\,\mathrm{d}s \\
&= a_p - \int_a^b \Phi_p(s)\sum_q \alpha_q K_q(s)\,\mathrm{d}s \\
&= a_p - \sum_q \alpha_q \int_a^b \Phi_p(s) K_q(s)\,\mathrm{d}s \\
&= a_p - \sum_q \alpha_q \int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= a_p - \sum_q \alpha_{pq}\alpha_q .
\end{aligned}$$

由式（2-2-18）得

$$\int_a^b \Phi_p(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s = \alpha_p,\quad p = 1,2,\cdots ,$$

即有

$$\left\langle \Phi_p(s), f(s)\right\rangle = \left\langle \Phi_p(s),\psi(s)\right\rangle + \left\langle \Phi_p(s), \int_a^b K(s,t)\psi(t)\,\mathrm{d}t\right\rangle,\quad p=1,2,\cdots ,$$

或者

$$\left\langle \Phi_p(s), f(s) \right\rangle = \left\langle \Phi_p(s), \psi(s) + \int_a^b K(s,t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle, \quad p = 1,2,\cdots.$$

由$\{\Phi_p\}$的完备性得

$$\psi(s) + \int_a^b K(s,t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = f(s),$$

此即表明$\psi(s)$是积分方程（2-1-1）的解.

2.3　小结

希尔伯特的代数化方法是积分方程求解理论的一次突破，是代数方法用于分析问题的一次有力尝试．他的解决方法体现了无限维空间上对偶思想的萌芽和产生，通过对偶作用将第二型积分方程问题转化为无穷线性方程组（2-2-17）的求解，将函数空间问题转化为数列空间问题，将分析问题转化为代数问题．但在当时，利用正交函数的级数形式表示$C[a,b]$中的函数被视为傅里叶级数表示的推广.

希尔伯特在积分方程方面共发表了六篇文章，其中第一、第四和第五这三篇文章蕴含了对偶思想的萌芽，孕育着丰富的泛函分析思想．本章的内容主要是对这几篇原始文献进行详细解读和还原，逐步挖掘并分析这位数学大师的对偶空间思想.

内积是希尔伯特求解积分方程的重要数学工具．他的第一篇文章利用内积处理有限线性方程组求解问题，将点的问题转化为线的问题，再取极限，其求解过程孕育着泛函分析中有限维空间的对偶思想．同时在第一篇文章中利用内积对有限二次型理论重新阐释，进而在第四篇文章发展了无限二次型理论，引入了l^2空间的雏形，并给出此空间上连续线性泛函的表示，最后用于求解无穷线性方程组．基于这些理论，希尔伯特在第五篇文章探讨$C[a,b]$上第二型积分方程的求解理论，利用内积将其转化为l^2空间上的无穷线性方程组，借用代数化方法求解分析中的问题，其方法蕴含着泛函分析中无穷维空间的对偶思想.

然而在当时，希尔伯特对积分方程的代数化方法一般被认为是傅里叶级数的推广在积分方程中的应用，进而抽象上升为希尔伯特空间中的内积作用，希尔伯特自己也指出：

“特征函数的结果可以作为三角函数、贝塞尔函数以及施图姆函数的展开式的

特殊情形，还有多个变量的函数的展式，这是庞加莱（Henri Poincaré，1854—1912 年）在位势理论边值问题的研究中首次建立了的．我的研究将表明任意函数的展开式理论不光能引入到常微分方程或偏微分方程上，而且积分方程也能被视为级数的展开式理论必要的基础和自然的出发点．①②”

尽管如此，作为 20 世纪的重要数学家，他的积分方程工作产生了深远影响，引起了众多数学家的关注，匈牙利数学家里斯便是其中之一．

我们现在已经知道，希尔伯特空间上任一连续线性泛函都是由希尔伯特空间中唯一的向量通过内积的形式来表示的．从这个角度而言，希尔伯特积分方程工作中的代数化也对应于相应空间上泛函的作用，而这一观点将在后续章节里斯的工作中表现得更为明显．里斯工作的突出之处在于不是从空间内积的角度看待希尔伯特的工作，而是从更深层次泛函的角度出发，由此促进了对偶空间理论的产生．

① Hilbert D. Grundzüge einer allgeminen Theorie der linearen Integralrechnungen. (Erste Mitteilung) [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1904: 49-91.

② 李亚亚．希尔伯特的积分方程理论[D]．西安：西北大学，2015.

第 3 章　具体对偶空间的产生

希尔伯特在积分方程代数化的过程中蕴含了对偶思想，而将希尔伯特的对偶思想发扬光大并将积分方程理论深入推进的是匈牙利数学家里斯．正是里斯的工作建立了积分方程（组）和线性方程组求解问题与相应空间上连续线性泛函表示问题之间的联系，产生了数学史上具有深远意义的具体对偶空间，从而为抽象对偶空间理论的建立提供了具体范例．里斯发表于 1910 年关于 L^p 空间的文章更被认为“在泛函分析史上的地位仅次于希尔伯特 1906 年的文章而位居第二”①．

在全面分析里斯关于对偶空间的具体工作之前，本章首先简要分析对偶空间的元素——连续线性泛函——这一概念产生的历史，以及法国数学家弗雷歇在连续线性泛函表示方面的工作；其次详细分析里斯在几类具体对偶空间工作中的思想及其影响；最后介绍波兰数学家斯坦豪斯（Hugo Steinhaus，1887—1972 年）关于 L^1 空间的对偶空间的工作．

3.1　连续线性泛函概念的产生

泛函是泛函分析中的核心概念，是对函数概念的进一步推广，也是对很多运算的抽象统一．连续线性泛函是泛函分析中一类重要的泛函，其性质简单、应用广泛，备受数学家关注．泛函分析中对偶的思想首先体现在连续线性泛函的表示中，它是一种特殊而常用的表示，对象有了内容，表示才有意义．一个空间上连续线性泛函全体构成的空间是此空间的对偶空间，因此在探讨具体对偶空间产生之前，先探讨其元素连续线性泛函的产生及表示．本节主要探讨数学家沃尔泰拉、

① Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 124.

平凯莱、阿达玛的泛函理论，他们的工作和思想在泛函分析史上影响重大、意义深远.

3.1.1 沃尔泰拉的泛函概念

1879 年，德国数学家维尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815—1895 年）在关于“变分法”问题分类研究中，首次提出两函数“逼近”的解析定义：函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在一个 p 阶的 ε-邻域内，若对任意 $x\in I$，有

$$\left|\psi(x)-\varphi(x)\right|<\varepsilon,\ \text{且}\left|\frac{\mathrm{d}^k\psi}{\mathrm{d}x^k}-\frac{\mathrm{d}^k\varphi}{\mathrm{d}x^k}\right|<\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,p.$$

这个定义的重要性在于给函数集提供了许多结构，从而在此集合上可以定义连续和极限概念.

图 3.1　沃尔泰拉

受维尔斯特拉斯“ε-邻域”概念的启发，意大利数学家兼物理学家沃尔泰拉（见图 3.1）得到了较好的“线函数理论”.

沃尔泰拉少年丧父，家境贫寒，早熟好学的他 11 岁时就流露出对数学和物理学的热爱. 他于 1878 年进入佛罗伦萨大学学习，在学习期间对迪尼（Ulisse Dini，1845—1918 年）和贝蒂（Enrico Betti，1823—1892 年）的课程很感兴趣，尤其在贝蒂教授影响下致力于对力学和数学物理的研究. 1882 年获得物理学博士学位后，他在次年成为比萨大学力学教授，后又在都灵大学和罗马大学分别担任力学和数学物理教授，1931 年因拒绝效忠法西斯政府被罗马大学解雇，此后在世界各地讲学，1940 年因病于罗马去世.

1887 年，沃尔泰拉开始“泛函”的研究，并发表了一系列文章：“关于依赖于其他函数的函数”[①]“关于线函数”[②]“关于复变量黎曼函数定理的存在性”[③]. 他

① Volterra V. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni [J]. Rend. R. Academia dei Lincei 2 Sem, 1887, 59: 97-105.

② Volterra V. Sopra le funzioni dipendenti da line [J]. Rend. Acc. Lincei ser. IV, 1887, 3: 274-281.

③ Volterra V. Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse [J]. Rend. Lincei, 1887, 4(3): 281-287.

主要关心这样一类函数，这类函数依赖于定义在$[a,b]$上的另一个函数所得的值，也意识到这类函数的独特之处，如其所言：

“很容易理解，我们现在所讨论函数概念的推广在本质上与普通函数不同．[①]”

他将其记为

$$F = F\left\|\left[\Phi\begin{pmatrix}b\\x\\a\end{pmatrix}\right]\right\| \quad 或 \quad F = F\left\|\left[\Phi(x)\right]\right\|.$$

在给出“泛函”概念之后，沃尔泰拉在“关于依赖于其他函数的函数”一文中，给出了$C[a,b]$上泛函连续性的恰当定义：

对于泛函

$$y = y\left\|\left[\phi\begin{pmatrix}B\\x\\A\end{pmatrix}\right]\right\|,$$

若给$\phi(x)$一个改变量$\psi(x)$，且$|\psi(x)| < \varepsilon$，则函数值y的改变量小于任意给定的数σ．

继而他又给出了关于泛函的“导函数、极大值、极小值以及泰勒级数的定义及相应命题”，由此可以看到他试图“对泛函建立类似于普通函数微积分理论的一套理论”，正如他自己所说的：

“我需要引入黎曼函数理论的推广，我认为它也适用于其他研究．[②]”

美国加利福尼亚大学数学教授温斯坦（Alan Weinstein，1943—）这样评价沃尔泰拉的“泛函”工作：

“由于变分法问题的需要，沃尔泰拉将函数理论推广到泛函理论，并于 1887 年发表了一系列论文，它们开启了泛函分析现代理论的研究．这些思想一经出现，就引起了当时许多著名数学家的注意．发展这些理论时，沃尔泰拉遵循一个思想：从离散到连续的过渡．他将该思想应用于求解沃尔泰拉型的积分方程，创造性地将积分方程视为线性代数方程组的极限过渡，他的方法为弗雷德霍姆和希尔伯特研究极限过程铺平了道路．[③]”

---

① Volterra V. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni [J]. Rend. R. Academia dei Lincei 2 Sem, 1887, 59: 97-105.

② Volterra V. Opere matematiche: memorie e note pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche [M]. 1957: 294.

③ Weinstein A. Review: Vito Volterra, Opere mathematiche. Memorie e Note [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1964, 70(3): 335-337.

3.1.2 平凯莱的泛函思想

平凯莱（见图 3.2）于 1853 年生于奥地利的里雅斯特，1936 年卒于意大利的波伦亚．1869 年他来到比萨求学，在贝蒂指导下从事数学研究，贝蒂继理论物理研究后开始分析学的研究，因而平凯莱早期的研究工作有很深的物理学背景．1877 年平凯莱来到柏林大学，他参加了库默尔（Ernst Eduard Kummer，1810—1893 年）、克罗内克（Leopold Kronecker，1823—1891 年）和维尔斯特拉斯的讨论班，其中维尔斯特拉斯对他后来的数学工作影响最大．1880 年以后，他先后担任巴勒莫大学、波伦亚大学教授，还在波伦亚大学创建了数学研究所，在很大程度上提高了该校数学学术水平．平凯莱是泛函分析理论的创始人之一，在拉普拉斯变换和无穷级数理论方面都做出了一定贡献[①]．他是爱丁堡皇家学会会员，也是 1928 年意大利博洛尼亚国际数学家大会主席．

图 3.2　平凯莱

与同时代的沃尔泰拉相比，平凯莱的影响力不如前者．沃尔泰拉常被美国、英国、瑞典、德国和法国等国邀请做报告或讲座，也用英语和法语写了许多广为流传的、有影响力的书．相比较沃尔泰拉，除意大利语外，平凯莱仅发表了 25 篇论文．虽然平凯莱的大量工作也被经常引用，但很奇怪的是其经常以脚注的形式而非在正文中出现，例如波莱尔在其关于发散级数的专著中，仅在脚注处提到平凯莱的工作（尤其是平凯莱 1897 年的论文）非常有趣．著名数学史家贝恩科普夫认为“没有证据表明（平凯莱在泛函分析方面的工作）对后来的数学发展有重要影响[②]”．然而，平凯莱偏偏钟爱“线性”这个观念，且这个思想对后来的阿达玛、弗雷歇、布莱特等数学家有一定影响．

早在 1886 年，平凯莱就开始了泛函演算的研究，“关于泛函演算的研究”[③]是其有关“泛函”的第一篇论文．他说：

---

① 何思谦总编. 数学辞海（第六卷）[M]. 太原：山西教育出版社，1998: 286.

② Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1966, 3(1): 1-96.

③ Pincherle S. Studi sopra alcune operazioni funzionali [J]. Mem. Bologna, 1886, 4(7): 393-442.

“我称一个运算为泛函演算，即是，当对解析函数进行作用时，仍得到解析函数．如有限的或无限的算术运算、微分和积分，有限或微分方程组的解、替换等．其中最重要的算法是形如 $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的定积分，其中 C 是 y-平面上任意闭或非闭曲线．[①]”

接下来他又发表了多篇泛函演算的论文，如“由定积分表示的泛函演算”[②]，讨论了形如 $\int A(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ 类型的积分．

1897 年，平凯莱发表论文“关于线性泛函演算”[③]．在这篇长文中，他深入地阐述了其近十年中关于泛函的认识和观点，他说：

“我们把分析的一些理论综合在一起，这里的变量元素不是数而是函数．”

正如对函数的认识有“狄利克雷关于函数的一般定义以及寻求一般结论的理论”和“由代数关系所确定即寻求更具体结论的解析函数理论”两种观点，其实这是关于“函数是综合的还是解析的”两种不同的认识．对于泛函而言亦是如此，即也有两种不同的观点：一种是由沃尔泰拉关于泛函的一般性质的研究，另一种是着重泛函作用于函数上的特殊性质的研究．

与其对函数解析表示形式的钟爱相一致，平凯莱侧重于泛函的后一种观点，着重于泛函的解析表示形式．他认为一种最简单的作用是类似于满足条件

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的函数 f 一样，具有可加性，即满足条件

$$A(\phi+\psi)=A(\phi)+A(\psi)\,,$$

$$A(a\phi)=aA(\phi)$$

的泛函 A．

将这样的泛函应用到解析函数，更特别地，应用到幂级数（空间），相应地会得到一个幂级数（空间）．由此，可以像对普通函数一样对此类泛函做相似的演算．因此，对这类泛函的主要工作就是找出其解析表示．

---

① Pincherle S. Opere scelte I, II [M]. Roma: Edizioni Cremonese, 1954:92.

② Pincherle S. Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies [J]. Acta mathematica, 1887, 10(1): 153-182.

③ Pincherle S. Mémoire sur le calcul fonctionnel distributive [J]. Mathematische Annalen, 1897, 49(3): 325-382.

由此可知，平凯莱讨论了解析函数（空间）上泛函的线性，该性质的讨论对认识对偶空间的元素起了很大作用.

平凯莱的这种解析思想深受维尔斯特拉斯的影响，正如意大利数学家特里科米（Francesco Giacomo Tricomi，1897—1978 年）所言：

“忠实于维尔斯特拉斯的思想，平凯莱没有采用后来经实践证明是最为成功的拓扑方法，而是从一系列级数开始. 虽然他的尝试不太成功，但也深入地研究了拉普拉斯变换、积分问题和级数问题. ①”

可以说，平凯莱对“线性泛函”和“算子”这样的新思想起到了间接的传播作用，逐渐使得许多数学家认同和接受这些思想与概念.

3.1.3 阿达玛的泛函表示思想

阿达玛（见图 3.3）是法国著名的数学家，1865 年出生于法国的凡尔赛，1963 年卒于巴黎. 阿达玛在 1884 年以第一名的身份进入巴黎高等师范学院，也是巴黎理工学院入学考试的第一名. 他 1892 年获得博士学位，并于同年因其关于“黎曼 ζ 函数”的论文获得数学科学大奖. 阿达玛的研究领域非常广泛，包括代数、函数论、泛函分析、微分方程、微分几何、拓扑等众多数学分支，其学生曼德勃罗特（Szolem Mandelbrojt，1899—1983 年，布尔巴基学派的创始人之一）这样评价恩师：“在所有数学领域，阿达玛都是伟大的启蒙者. ②”阿达玛因其杰出的数学成就于 1916 年获得法国最高科学奖“CNRS 金奖”，并于当年入选法国科学院院士，分别于 1920 年和 1929 年成为荷兰和苏联科学院的外籍院士. 1936 年阿达玛应邀在我国清华大学进行访问，促进了我国数学与国际先进数学思想的交流碰撞.

图 3.3　阿达玛

阿达玛受庞加莱定性理论的启发，在 1903 年的一篇短注③中开始“泛函”研究. 在该篇短注的开头便给出了线性泛函的定义：

① Tricomi F. G. Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

② Mandelbrojt S. The mathematical work of Jacques Hadamard [J]. Amer. Math. Monthly, 1953, 60: 599-604.

③ Hadamard J. Sur les opérations fonctionnelles [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1903, 136: 351-354.

$$U(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 U(f_1) + c_2 U(f_2).$$

在阿达玛之前，平凯莱和布莱特（Carlo Bourlet，1866—1913 年）等人主要利用函数的解析表达式来表示泛函．例如，若

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

则

$$Uf = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} U(x - x_0)^k,$$

令 $a_k = U(x - x_0)^k$，有

$$Uf = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} a_k.$$

但这种表示有两个不足之处：一是 x_0 可取任意一点，从而 U 也就不唯一；二是该表达式并非对所有解析函数都成立.

为了克服这些不足,阿达玛考虑利用解析函数的柯西积分公式来表示泛函.其思想如下。由柯西积分公式，有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

用 U 作用得

$$U[f(x)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C U\left(\frac{1}{t - x}\right) f(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(t) f(t) \mathrm{d}t, \tag{3-1-1}$$

式中 $\varphi(t) = U\left(\dfrac{1}{t - x}\right)$.

这样我们可看到，当 $\varphi(t)$ 具有良好的性质时，式（3-1-1）可推广至更多的函数类，而不局限于解析函数类．因此有必要去掉函数解析性的要求，这就涉及这样一个问题，对更广泛的函数类是否存在一种类似于解析函数柯西积分公式的表达式.

受维尔斯特拉斯和基尔霍夫（Gustav Kirchhoff，1824—1887 年）思想的启发，阿达玛引入函数 F，使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \mathrm{d}x = 1.$$

如 F 可取 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$．则对区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 有如下表达式：

$$f(x)=\lim_{\mu\to\pm\infty}\mu\int_a^b f(t)F\left[\mu(t-x)\right]\mathrm{d}t\text{，}\quad a<x<b\,. \tag{3-1-2}$$

由 U 的连续性（阿达玛并未明确指出 U 连续的含义）得

$$Uf=\lim_{\mu\to\pm\infty}\int_a^b f(x)U\left(\mu F\left[\mu(t-x)\right]\right)\mathrm{d}t=\lim_{\mu\to\pm\infty}\int_a^b f(t)\Phi(t,\mu)\mathrm{d}t\text{，} \tag{3-1-3}$$

式中 $\Phi(t,\mu)=U\left(\mu F\left[\mu(t-x)\right]\right)$．

这样，利用表达式（3-1-2），他就给出了 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的一种表示形式，即式（3-1-3）．

与前人相比，阿达玛给出了更广泛函数类上连续线性泛函的一种表示形式．但他给出的表示形式与 F 的选取有关，而且是以积分的极限形式表示的，在一定程度上与前人的表示形式具有相同的缺陷．

由上分析，沃尔泰拉受狄利克雷关于函数的综合定义以及康托尔、阿斯科利（Giulio Ascoli，1843—1896 年）等人关于连续函数集合工作的启发，开创性地提出了“线函数理论”；平凯莱受函数运算启发以及深刻的物理学背景对可加泛函，也就是说对线性泛函进行了研究；阿达玛开始关注连续线性泛函表示这一问题，对具体空间上的表示进行了研究．他们的泛函及泛函表示思想为对偶空间的出现奠定了基础．

3.2 弗雷歇的连续线性泛函表示工作

弗雷歇（见图 3.4）是法国数学家，1878 年生于法国马利尼的一个新教家庭，1973 年卒于巴黎．他在点集拓扑方面做出了重大贡献，并引入度量空间概念，在统计、概率、变分法领域都有所建树．

图 3.4　弗雷歇

弗雷歇在巴黎布芬中学学习时，阿达玛是其数学老师．阿达玛看到了年轻弗雷歇的潜力，决定单独指导他．1894 年阿达玛到波尔多大学后，一直通过书信形式向弗雷歇提出许多数学问题，并严厉批评他解决问题过程中的错误．完成中学学业后，弗雷歇被要求服兵役．这也是他决定学习物理还是数学的时候，他最终选

择了数学. 1900 年他来到巴黎高等师范学院学习，后成为阿达玛的首位博士生. 弗雷歇一生尊称阿达玛为其“精神之父”，他的很多工作都深受其导师的影响.

受阿达玛在泛函表示方面工作的启发，弗雷歇从 1904 年开始进行具体函数空间上连续线性泛函表示方面的研究，至 1907 年在此方面共发表了 3 篇论文，深入探讨了 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示问题，并给出了 $L^2[0,2\pi]$ 上连续线性泛函的完全刻画（里斯于 1907 年也给出了同样的刻画，但出发点不同，这将在下一节中专门叙述）.

3.2.1　$C[a,b]$ 上连续线性泛函表示

弗雷歇在其于 1904 年发表的“关于线性演算”①一文中，为了寻找一种对所有连续函数适用的达到一致收敛的一种级数表示形式，采用由意大利数学家切萨罗（Ernesto Cesàro，1859—1906 年）引入的广义傅里叶级数概念，并利用匈牙利数学家费耶尔（Lipót Fejér，1880—1959 年）的结论“任何连续周期函数都能表示为其广义傅里叶展开式的一致收敛的极限”，得到 $[0,\pi]$ 上连续函数 f 的一致收敛级数表达式.

设 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $a_0+a_1\cos x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$. 令

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx,$$

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+\cdots+S_{n-1}(x)}{n}=\frac{na_0+(n-1)a_1\cos x+\cdots+a_{n-1}\cos(n-1)x}{n},\qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

费耶尔得到 $\sigma_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 将

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

代入上式得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f(y)\sigma_n(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

式中 $\sigma_n(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\frac{1}{2}n+(n-1)\cos y\cos x+\cdots+\cos(n-1)y\cos(n-1)x}{n}\right)$.

① Fréchet M. Sur les opérations linéaires [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1904, 5(4): 493-499.

设 U 是 $C[0,\pi]$ 上的连续线性泛函，弗雷歇得到与阿达玛类似的关于 U_f 的表示：

$$U_f = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(y)K_n(y)\,\mathrm{d}\,y \tag{3-2-2}$$

式中 $K_n(y)=U_{\sigma_n(\cdot,y)}$.

弗雷歇也指出，利用变换 $y=a+(b-a)\dfrac{x}{\pi}$ 可将前面关于 $[0,\pi]$ 上连续周期函数空间上连续泛函的表示转化为 $[a,b]$ 上连续周期函数空间上连续泛函的表示.

从函数的级数表达式出发给出所在函数空间上连续线性泛函的表示形式，不仅使弗雷歇给出了阿达玛关于 $C[a,b]$ 上连续线性泛函表示形式的一种全新证明，而且使他注意到一个重要细节，即从形式上看 $K_n(y)$ 是一个函数广义傅里叶级数的部分和形式.

由 $K_n(y)$ 的定义，弗雷歇得到 $K_n(y)$ 的展开形式：

$$K_n(y)=\frac{n\cdot u_0+(n-1)u_1\cos y+\cdots+u_{n-1}\cos(n-1)y}{n}. \tag{3-2-3}$$

式（3-2-1）和式（3-2-3）的相似性，使弗雷歇认识到，若 $K_n(y)$ 确实是一个连续函数的广义傅里叶级数的部分和，则 U_f 即可实现如下的表达形式：

$$U_f=\int_0^{\pi} f(y)K(y)\,\mathrm{d}\,y,$$

式中 $K(y)$ 是一个连续函数.

在该文中，弗雷歇并没有解决 $K_n(y)$ 是否是一个连续函数的广义傅里叶级数部分和的问题，但这一思想在他以后关于函数空间上连续线性泛函的进一步研究中得到充分应用，并由此给出了 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函的完全表示. 我们将在弗雷歇在此方面的相关文献解读中详细说明.

同时，在该文中弗雷歇还提到只要 $K(y)$ 在勒贝格意义下有界，形式

$$\int_0^{\pi} f(y)K(y)\,\mathrm{d}\,y$$

仍能表示 $C[a,b]$ 上的一个泛函. 他的这一思想火花在形式上突破了看起来表达自然的那些形式的限制，为连续线性泛函的进一步完全表示打开了思路.

3.2.2　$C[a,b]$ 上连续线性泛函表示的进一步思考

1905 年弗雷歇发表了其关于连续线性泛函表示的第二篇文章①，文中他的工作主要是对阿达玛连续线性泛函表示思想的一些分析与思考．这一方面说明弗雷歇深受阿达玛的影响，另一方面我们也看到他对阿达玛思想的突破．

在关于阿达玛表示形式的几点说明中，弗雷歇试图对阿达玛的表示形式进行简化，主要体现在两方面：一是关于核函数 $K_n(y)$ 的简化；二是关于泛函 U 的分解．这些思想在后来里斯关于线性泛函的表示定理中实现了质的飞跃，但此时弗雷歇依旧受限于阿达玛所给表示形式的框架内．

另外，弗雷歇给出了有界可测函数空间上的两个具体泛函形式，还在关于阿达玛所给积分形式的分析中认识到可以在更广泛的空间上定义泛函．特别是在对阿达玛所给形式的分析中，已经有了之后 L^1 空间的对偶是 L^∞ 空间这一思想的影子．

从弗雷歇的工作不难看出，此时他已受到里斯将勒贝格积分理论引入函数空间进行研究的影响，也考虑到更广泛的函数类，但还没有解决如何定义可测函数空间及其上连续线性泛函的问题．如他举例，若定义 $[a,b]$ 上有界可测函数空间上的泛函如下：

$$U_f = f(a)\,,$$

则 U_f 不会有形式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi K_n(y)f(y)\,\mathrm{d}\,y$.

这是因为，若令

$$f(y)=\begin{cases}1, x=a\\0, a<x\leqslant b\end{cases},$$

则有 $U_f = f(a) = 1$，出现 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi K_n(y)f(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ 的矛盾．产生这一矛盾的主要原因是，此时他还没有认识到在积分意义下可测函数的相等实际上为几乎处处相等，而泛函 $U_f = f(a)$ 的定义对于可测函数空间来说是没有意义的．

尽管在该文中，弗雷歇并没有得出显著的结论，但这些分析和思考为其关于

① Fréchet M. Sur les opérations linéaires [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1905, 6(2): 134-140.

连续线性泛函表示工作的进一步突破奠定了基础.

3.2.3 $L^2[0,2\pi]$ 上连续线性泛函表示

弗雷歇在 1907 年题为“关于函数集合和线性演算”[①]的一文中，实现了其连续线性泛函表示工作的突破．受当时里斯、费舍尔（Ernst Sigismund Fischer，1875—1956 年）等人关于函数空间研究的影响，在该文中弗雷歇给出了 $[0,2\pi]$ 上的有界可测函数空间、$L^2[0,2\pi]$ 上的收敛及其上连续线性泛函的恰当定义.

他首先定义 $L^2[0,2\pi]$ 上的收敛为由里斯和费舍尔定义的平均收敛．U 连续指的是若 f_n（平均）收敛于 f，则 U_{f_n} 收敛于 U_f．在此基础上，他给出了结论：

对于 $L^2[0,2\pi]$ 上的任意线性运算 U_f，对应 $L^2[0,2\pi]$ 中的一个函数 $k(x)$，且有

$$U_f=\int_0^{2\pi} f(x)k(x)\,\mathrm{d}x .$$

他的程序如下．对任意 $f\in L^2[0,2\pi]$，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+\cdots+b_n\sin nx\right),$$

这里的极限即为 $L^2[0,2\pi]$ 上的极限，所以由 U 连续有

$$\begin{aligned}U_f&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}U_1+a_1U_{\cos x}+\cdots+b_nU_{\sin nx}\right)\\&=\frac{a_0}{2}U_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nU_{\cos nx}+\cdots+b_nU_{\sin nx}\right).\end{aligned}$$

令

$$\alpha_0=\frac{U_1}{\pi},\ \cdots,\ \alpha_n=\frac{1}{\pi}U_{\cos nx},\ \beta_n=\frac{1}{\pi}U_{\sin nx},$$

则

$$U_f=\pi\left(\frac{a_0}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\alpha_n+b_n\beta_n\right)\right).$$

接下来，弗雷歇证明这样得到的系数“$\alpha_0,\cdots,\alpha_n,\beta_n,\cdots$”即为 $L^2[0,2\pi]$ 上某一函数的傅里叶系数．由此，令

① Fréchet M. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 1414-1416.

$$k(x)=\frac{a_0}{2}+\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x+\cdots+\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx+\cdots,$$

则可得 $L^2[0,2\pi]$ 上连续线性泛函的表示.

但不可否认，弗雷歇在该文中依旧沿袭其之前的思路：根据所考虑函数空间中函数的某种展开式，而这种展开式按照该函数空间中度量的定义收敛于该函数，从而作用于该函数的连续线性泛函可表示为作用于展开式中每一项的和（级数）的形式，这样将连续线性泛函表示为级数的形式．而突破之处在于他通过进一步研究，确定这样得到的级数的系数为某一函数的某种展开形式，依此，再将级数的形式表示为该函数（他称其为“生成元”）的某种积分形式.

这一思想的成功应用就是给出了 $L^2[0,2\pi]$ 上连续线性泛函的一个确切表达式.

从对弗雷歇的文献分析中，我们看到他在连续线性泛函表示方面的工作具有连贯性．每一次的工作都是对其前期工作思想方法的一种突破．但他的局限性在于仍是从连续的角度以及从所研究函数空间中函数的具体表达式出发来研究其上泛函的表示的．在弗雷歇的工作中，更多的是一种综合思想的解析表示，代数方法重于分析方法，由连续线性泛函的表示并没有产生明确的对偶思想和空间思想.

但弗雷歇所做的工作在一定意义上起到了传承和发扬作用，正是这种传承和发扬，使得里斯熟悉了连续线性泛函表示这一领域并取得了显著成就.

3.3　里斯的对偶工作

里斯（见图 3.5）是匈牙利数学家，1880 年出生于匈牙利杰尔城的一个犹太医生家庭，1956 年卒于匈牙利的布达佩斯，是泛函分析创始人之一.

图 3.5　里斯

里斯早期在布达佩斯学习，一段时期后来到哥廷根大学和苏黎世理工学院．1902 年，他完成关于“综合射影几何”的博士论文，在布达佩斯大学获得博士学位．之后在哥廷根访学一年，受到希尔伯特和闵可夫斯基（Hermann Minkowski，1864—1909 年）的影响，这从下文关于里斯工作的分析中可见一斑，并与德国数学家施密特和外尔（Hermann Weyl，1885—1955 年）建

立了深厚友谊.而这一时间点正是希尔伯特如火如荼地展开积分方程研究之际.同年，里斯也不时到巴黎游学，并与法国数学家波莱尔、勒贝格保持着联系．这一经历在里斯后来的学术研究中占有重要地位，而里斯通过抽象方法解决具体问题的学术风格与此也不无关系.

里斯在斯洛伐克和布达佩斯做了几年中学老师后，于 1911 年任教于科洛兹瓦尔大学，该大学是当时重要的学术中心，在某些方面比布达佩斯大学更进步. 1920 年，在匈牙利的塞格德建立了一所新大学，讲匈牙利语的学生和科洛兹瓦尔的教师被邀请到该大学．里斯也于当年和科洛兹瓦尔大学著名数学教授哈尔（Alfréd Haar，1885—1933 年）一起来到塞格德大学．在塞德格大学，他们创建了波尔约数学研究所，并于 1922 年创办了 *Acta Scientiarum Mathematicarum* 杂志，该杂志很快就享有了很高的国际声誉，也正因为里斯的卓越成就使得塞德格大学成为当时国际数学界公认的数学研究中心. 1936 年他被选为匈牙利科学院院士.里斯的研究领域广泛，他在点集拓扑、遍历理论、正交函数系、傅里叶分析、解析函数边界值问题、位势论、函数逼近论、积分方程、半序向量空间理论等方面都有建树.

本节主要解读他在泛函分析方面与对偶空间相关的一些成就.

希尔伯特关于 $C[a,b]$ 上积分方程（2-1-1）求解理论的突破之处是引入了 $C[a,b]$ 上的完备规范正交系，利用对偶思想将 $C[a,b]$ 上的积分方程（2-1-1）转化为 l^2 上相应的无穷线性方程组（2-2-17），关键之处是建立式（2-1-1）与式（2-2-16）的等价.

里斯充分抓住了希尔伯特积分方程工作中的关键点.在 1907 年 3 月的文章“关于正交函数系”[①]中，里斯写道：

“类似于傅里叶系数,（希尔伯特）利用未知函数和正交函数系积分得到的系数将两个问题（函数方程的解与无限变量的无穷线性方程组的解）联系起来；对于希尔伯特的方法，下面提出的问题非常重要.”

图 3.6 给出了里斯提出的问题。

① Riesz F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 615-619.

Pour la méthode de M. Hilbert, la question suivante est de grande importance :

Étant donné un système orthogonal de fonctions, déduites pour un intervalle déterminé, attribuons à chaque fonction du système un nombre réel. Sous quelles conditions existera-t-il une fonction telle que, pour chaque fonction du système, l'intégrale du produit de cette fonction et de la fonction en question, prise sur l'intervalle, soit égale au nombre donné d'avance?

图 3.6　里斯提出的问题

里斯提出的问题即为函数 f 满足什么条件时，其傅里叶系数

$$\int_a^b \Phi_p(s) f(s) \mathrm{d}s = a_p \text{，} \quad p = 1, 2, \cdots \text{，}$$

满足条件 $\sum_{p=1}^{\infty} a_p{}^2 < \infty$，即 $\{a_p\} \in l^2$.

正是对以上问题的完美回答，使得里斯将积分方程（2-1-1）的解理论推广到 $L^2[a,b]$ 空间上，建立起 $L^2[a,b]$ 上的对偶思想，并将这种思想进一步延拓到 $L^p[a,b]$ 和 l^p $(p>1)$ 空间上，建立起

$$L^p[a,b]\,(p>1)$$

与

$$L^q[a,b]\left(q = \frac{p}{p-1}\right)^{①}$$

之间的对偶，以及

$$l^p \ (p>1)$$

与

$$l^q\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$$

之间的对偶，还解决了阿达玛提出的 $C[a,b]$ 上的泛函表示问题，这些具体空间的对偶为对偶空间的抽象化发展奠定了有力的基础．下面对其工作逐一详细分析．

① 在泛函分析中，涉及 L^p (l^p)与 L^q (l^q)时，通常默认 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3.3.1 $L^2[a,b]$ 的对偶

1. $L^2[a,b]$ 的引入

希尔伯特在其积分方程工作的第五篇文章中，引入了 $C[a,b]$ 上完备规范正交系的定义，并证明了 $C[a,b]$ 上完备规范正交系的存在性，以此实现了 $C[a,b]$ 上第二型弗雷德霍姆积分方程向 l^2 上无穷线性方程组的等价转化.

其实 1905 年在哥廷根举行的一次数学大会上，希尔伯特的学生施密特就报告了关于 $C[a,b]$ 上完备规范正交系的研究成果．他指出，$C[a,b]$ 上的一个子集 E 称为完备正交的，如果

Ⅰ．其中任意两个函数的乘积在 $[a,b]$ 上的积分为零（正交性）;

Ⅱ．与 E 中所有函数都正交的连续函数只能是零函数（完备性）.

在此基础上，施密特陈述了如下结论：

$C[a,b]$ 上的任何完备正交系都是可数的．[①]

里斯对这一结论非常感兴趣，他意识到施密特的结论与弗雷歇 1906 年发展的度量空间理论之间有着密切联系．弗雷歇表明 $C[a,b]$ 上的孤立点集是有限的或可数的．利用弗雷歇的这一结论，里斯通过表明 $C[a,b]$ 上的正交系（注意，这里并没有强调完备性）是孤立点集，给出了施密特结论的新证明.

弗雷歇的结论建立在 $C[a,b]$ 可定义距离成为度量空间基础上．里斯继续探寻：弗雷歇孤立点集的概念能否推广到更一般的函数类，从而将施密特的结论也推广到这类函数空间上?

根据函数系正交性的定义，里斯认识到对于有界勒贝格可积函数同样可以定义其正交性，但对于勒贝格积分而言，存在积分为零的非零函数，因此若不加以限制，正交性的推广将毫无意义．因此里斯写道：

“我们知道，如果希望得到一些结论，那么必须排除积分为零的（非零）函数，它们在积分为零的情况下应当被视为等价的．[②]”

---

① Riesz F. Sur les ensembles de fonctions [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1906, 143: 738-741.

② Riesz F. Sur les ensembles de fonctions [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1906, 143: 738-741.

在这样的认识下，里斯给出了勒贝格可积函数类上距离的定义：

$$d(f_1,f_2)=\sqrt{\int_a^b (f_1-f_2)^2}\ .$$

并限制在有界勒贝格可积函数类上，推广了弗雷歇的结论．在强调正交函数系中不包含积分为零函数的基础上，将施密特的结论推广到有界勒贝格可积函数类上．

这也是弗雷歇度量空间理论发表后，除 $C[a,b]$ 外的又一函数度量空间．

在 1907 年“关于正交函数系”的这篇文章中，为了推广希尔伯特求解积分方程的代数化方法，里斯考虑勒贝格平方可积函数，并提到施密特的结论可以毫不费力地从有界勒贝格函数类推广到勒贝格平方可积函数类．

同年，奥地利数学家费舍尔在“关于平均收敛”①一文中，从 $L^2[a,b]$ 本身出发，首先明确给出了 $L^2[a,b]$ 上平均收敛（即柯西列）的定义．

【定义 1】 设 $\{f_n\}\subset L^2[a,b]$，若

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b (f_m-f_n)^2\,\mathrm{d}\,x=0\ ,$$

则称 $\{f_n\}$ 平均收敛．

【定义 2】 若 $f\in L^2[a,b]$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f-f_n)^2\,\mathrm{d}\,x=0\ ,$$

则称 $\{f_n\}$ 平均收敛于 f .

然后证明了 $L^2[a,b]$ 的完备性：

若 $\{f_n\}\subset L^2[a,b]$ 平均收敛，则存在 $f\in L^2[a,b]$，$\{f_n\}$ 平均收敛于 f .

在该文中，费舍尔也强调了二人的思想是独立的，发表的优先权属于里斯．

2. 里斯求解 $L^2[a,b]$ 上的积分方程（2-1-1）

希尔伯特利用对偶思想将 $C[a,b]$ 上的积分方程转化为 l^2 上的无穷线性方程组，由此可知 $C[a,b]$ 上的积分方程一定能转化为 l^2 上相应的线性方程组，但他并未继续考虑这样的对应是否是可逆的，即 l^2 上的线性方程组是否一定对应 $C[a,b]$ 上的积分方程？

里斯反过来考虑：方程组（2-2-12）能否对应更广泛的函数类，即函数 f 满

① Fischer E. Sur la convergence en moyenne [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 1022-1024.

足什么条件，其傅里叶系数

$$\int_a^b \Phi_p(s) f(s)\,\mathrm{d}s = a_p\,,\quad p = 1,2,\cdots$$

满足条件

$$\sum_{p=1}^{\infty} {a_p}^2 < \infty\,,$$

即 $\{a_p\} \in l^2$. 该问题被称为 $L^2[a,b]$ 上的矩量问题.

从希尔伯特将无穷线性方程组的工作应用于求解积分方程（2-1-1）的过程可知，已知函数 f 和 K 的连续性主要用于保证满足条件

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x < \infty\,,\quad \int_a^b\int_a^b K(s,t)^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < \infty\,.$$

希尔伯特通过 $C[a,b]$ 中的完备规范正交系实现了积分方程的代数化，可以说，完备规范正交系是希尔伯特求解第二型积分方程的有力工具.

上一节梳理了里斯关于正交函数系的推广工作. 有了这些准备工作，里斯考虑勒贝格平方可积函数，得到如下结论.

【定理 3.1】 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 是 $[a,b]$ 上正交的平方可积函数系，即

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,\quad i \neq j\,,$$

$$\int_a^b {\varphi_i}^2(x)\,\mathrm{d}x = c^2\,,$$

则存在平方可积函数 f 使得

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = a_i$$

当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2 < \infty$①.

这样对于积分方程（2-1-1），可以考虑已知函数 $f(s)$ 和 $K(s,t)$ 都是平方可积的情形，即 $L^2[a,b]$ 上积分方程（2-1-1）的解理论.

对积分方程（2-1-1）两边同时用正交函数系 $\{\Phi_p\}$（内积）作用，得

$$\int_a^b \Phi_p(s) f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \Phi_p(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s + \int_a^b \Phi_p(s)\left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\,.$$

① Riesz F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 615-619 .

但在将上式完全转化为 l^2 上的无穷线性方程组（2-2-12）时，里斯面临重要的问题：这样的转化是否等价？即将

$$\int_a^b \Phi_p(s)\left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

转化为相应系数时，对于 $L^2[a,b]$ 上的函数，能否像 $C[a,b]$ 中的函数那样满足完备性的要求？

在 1907 年 4 月发表的文章①中，里斯解决了这一问题，对于 $L^2[a,b]$ 上的完备规范正交系 $\{\Phi_p\}$ 下式成立：

$$\int_a^b f(s)g(s)\,\mathrm{d}s=\sum_{p=1}^{\infty}\int_a^b f(s)\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s\int_a^b g(s)\Phi_p(s)\,\mathrm{d}s\,,\quad f,g\in L^2[a,b]\,.$$

并写道：

“我将应用我的定理来解决弗雷德霍姆的方程.”

即由

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{q=1}^{\infty}\int_a^b K(s,t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

得

$$\begin{aligned}\int_a^b \Phi_p(s)\left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s&=\sum_{q=1}^{\infty}\int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\Phi_p(t)\,\mathrm{d}s\\&=\sum_{q=1}^{\infty}\int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{q=1}^{\infty}\alpha_{p,q}x_q\,.\end{aligned}$$

式中，$\alpha_{p,q}=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$，$x_q=\int_a^b \varphi(t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t$，$p,q=1,2,\cdots$.

再令

$$a_p=\int_a^b \Phi_p(s)f(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

则 $L^2[a,b]$ 上的积分方程(2-1-1)完全等价转化为相应的无穷线性方程组(2-2-12). 从

① Riesz F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 734-736.

而由希尔伯特关于线性方程组（2-2-12）的解给出了$L^2[a,b]$上积分方程（2-1-1）的解：或者存在唯一确定的解，或者相应的齐次线性方程组至少有一个平方可积的解．由此，将希尔伯特有关l^2上的无穷线性方程组思想完全应用到了积分方程（2-1-1）在f和K是平方可积函数的条件上．在文中里斯也说：

“我这里研究的方程类型包括了希尔伯特所研究的方程类型．”

他还指出，对于满足积分方程（2-1-1）的一些特殊条件的解，可由该方程中已知函数的相应性质得到．特别地，由f和K的连续性，可得解的连续性．

3. $L^2[a,b]$上连续线性泛函的表示

里斯和费舍尔同年（指 1907 年）关于$L^2[a,b]$上相应问题的研究，特别是费舍尔关于$L^2[a,b]$完备性的结论，促使里斯对其在$L^2[a,b]$上的已有研究做进一步思考．

在该年 6 月“关于可积函数组的解析几何类”①一文中，里斯写道：

“我研究的目的是：深化坐标法在可积函数组研究中的应用．”

由此可见，其进一步研究的目的是深化坐标方法（代数化方法）在平方可积函数系中的应用．在此基础上里斯明确了l^2和$L^2[a,b]$之间的同构，在$L^2[a,b]$中引入几何结构，指出二者之间的同构是函数综合几何性与解析几何性的结合．并强调其理论的基础是建立在距离概念上的函数列的极限概念．作为其理论的应用，里斯给出了$L^2[a,b]$上连续线性泛函的表示．

【定理 3.2】设U是$L^2[a,b]$上的连续线性泛函，则存在$u(x)\in L^2[a,b]$，使得对任意$f\in L^2[a,b]$，

$$U(f)=\int_a^b f(x)u(x)\,\mathrm{d}x .$$

弗雷歇在同年也给出了这一定理，从关于弗雷歇与里斯思想的比较分析②一文中可以看到二者的表示思想完全不同．

尽管里斯完美解决了$L^2[a,b]$上积分方程（2-1-1）的求解问题，也给出了该空间上连续线性泛函的表示，但$L^2[a,b]$与其自身对偶以及与l^2同构的特殊性，

① Riesz F. Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 1409-1411.

② 冯丽霞，袁敏. 弗雷歇和里斯泛函表示工作思想分析[J]. 西北大学学报（自然科学版），2016, 46(2).

遮盖了希尔伯特方法的本质思想，或者说体现了希尔伯特方法的局限性．应该说，此时里斯并未意识到积分方程（2-1-1）的转化与 $L^2[a,b]$ 的对偶空间以及 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函表示之间的直接关系．

3.3.2　$C[a,b]$ 的对偶

里斯和弗雷歇在 1907 年都给出了 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函的表示．可以说是受弗雷歇的影响，里斯注意到了连续线性泛函表示方面的工作．在对正交函数系是可数集的推广问题上，里斯引用了弗雷歇的工作，表明里斯对弗雷歇的相关工作很熟悉．1907 年，二人之间通信频繁，在信中他们交流了正在研究的工作，特别是 $L^2[a,b]$ 上相关问题的研究．因此，当我们看到里斯在 1909 年一扫其从相关问题出发的研究风格，在题为“关于线性泛函演算”①的文章中单单给出 $C[0,1]$ 上有界线性泛函的表示，也就不足为奇．

与蕴含 $L^2[a,b]$ 对偶思想的出发点相似，里斯不是从 $C[0,1]$ 上的连续线性泛函是什么形式出发的，而是以考虑什么形式的泛函可能是 $C[0,1]$ 上的连续线性泛函为出发点的．

希尔伯特在关于有界线型的研究中已经指出有界线型一定是连续的．尽管里斯没有明确指出线性泛函的连续性与有界性之间的等价关系，但显然他在该文中用到了这一事实．实际上，里斯在该文给出的正是 $C[0,1]$ 上有界线性泛函的刻画．

设 A 是 $C[0,1]$ 上的连续线性泛函，则存在常数 M_A，对每个 $f(x)$，有

$$\left|A\left[f(x)\right]\right| \leqslant M_A \cdot \max\left|f(x)\right|.$$

基于这一认识，里斯表明勒贝格-斯蒂尔杰斯积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 满足条件

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)\right| \leqslant \max\left|f(x)\right| \cdot \alpha(x) \text{ 的全变差},$$

从而可以表示 $C[0,1]$ 上的有界（连续）线性泛函．

同时里斯反过来考虑，是否 $C[0,1]$ 上的每个有界（连续）线性泛函都具有勒贝格-斯蒂尔杰斯积分的形式？

① Riesz F. Sur les opérations fonctionnelles linéaires [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1909, 149：974-977.

因此里斯工作的重点就是，如何根据 $C[0,1]$ 上的有界（连续）线性泛函 A 确定出其可能对应的有界变差函数 $\alpha(x)$. 根据勒贝格-斯蒂尔杰斯积分的形式，不定积分

$$\int_0^{\xi} \mathrm{d}\alpha(x)$$

对 $\alpha(x)$ 的确定起关键作用. 但

$$f(x,\xi)=\begin{cases}1, 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ 0, \xi \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$$

的不连续性促使里斯去考虑函数

$$f(x,\xi)=\begin{cases}x, 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \xi, \xi \leqslant x \leqslant 1\end{cases},$$

然后对 $C[0,1]$ 上的连续线性泛函 A 定义如下函数:

$$A(\xi)=A\left[f(x,\xi)\right], \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

接着他验证了这样定义的函数 $A(\xi)$ 满足不等式

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left|A(x_i)-2A\left(\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+A(x_{i+1})\right|}{x_{i+1}-x_i} \leqslant \frac{M_A}{2},$$

这一不等式表明函数 $A(\xi)$ 的导数处处存在，且其导函数是有界变差的. 由此定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}-A[1], \quad x=0 \\ A'(x), \quad 0<\alpha<1 \\ 0, \quad x=1\end{cases},$$

（注意，里斯在这里对泛函 A 和函数 A 用的是同一个符号.）

设 $0 \leqslant \eta<\xi \leqslant 1$，一方面 $A(\xi)=A\left[f(x,\xi)\right]$；另一方面，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\left(x,\xi\right)\mathrm{d}\alpha v &= \int_0^{\xi} f(x,\xi)\,\mathrm{d}\alpha(x)+\int_{\xi}^1 f(x,\xi)\,\mathrm{d}\alpha(x)=\int_0^{\xi} x\,\mathrm{d}\alpha(x)+\int_{\xi}^1 \xi\,\mathrm{d}\alpha(x) \\
&= x\alpha(x)\Big|_0^{\xi}-\int_0^{\xi}\alpha(x)\,\mathrm{d}x+\xi\left(\alpha(1)-\alpha(\xi)\right) \\
&= \xi\alpha(\xi)+A(\xi)-A(0)+\xi\left(0-\alpha(\xi)\right) \\
&= A(\xi)-A(0) \\
&= A(\xi),
\end{aligned}$$

因此，有

$$\int_0^1 f(x,\xi)\,\mathrm{d}\alpha(x) = A\left[f(x,\xi)\right].$$

由 $f(x,\xi)$ 的线性组合在 $C[0,1]$ 上稠密及 A 的连续性可得，对任意 $f\in C[0,1]$，有

$$A(f)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

从而得到下面的结论.

【定理 3.3】给定线性运算 $A\left[f(x)\right]$，则可确定有界变差函数 $\alpha(x)$，使得对任意连续函数 $f(x)$，有

$$A\left[f(x)\right]=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

至此，里斯给出了 $C[0,1]$ 上连续线性泛函的表示（见图 3.7），也指出关于 A 的这种表示并不是唯一的．因为若 A 为零泛函，则 $\alpha(x)$ 可取任意一个常值函数．一种重要情形就是选取全变差最小的 $\alpha(x)$.

Étant donnée l'opération linéaire $\mathrm{A}[f(x)]$, *on peut déterminer la fonction à variation bornée* $\alpha(x)$, *telle que, quelle que soit la fonction continue* $f(x)$, *on ait*

$$\mathrm{A}[f(x)]=\int_0^1 f(x)\,d\alpha(x).$$

图 3.7　里斯关于 $C[0,1]$ 上连续线性泛函的表示

与之前弗雷歇关于 $C[a,b]$ 上连续线性泛函表示的解析分析方法完全不同，里斯并没有从 $C[a,b]$ 上每个函数的一致收敛级数的表示出发，而是首先指出连续线性泛函的有界性这一本质性质，并在证明过程中充分利用了这一性质．其次里斯考虑一个函数满足什么条件可以表示为一个有界变差函数的不定积分，并与连续线性泛函结合起来，利用其作用在特殊函数上定义一个新函数，这一思想在其后关于 $L^p[a,b]$ 上连续线性泛函的表示中得到进一步的发展．在此我们看到，里斯关于 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示已经具有泛函分析中综合的思想——从函数空间的整体出发.

在数学界，很少有定理因为其重要作用，使得与此相关的定理都被赋予同一名称，但里斯在 1909 年发表的关于 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示定理即为其一．该文不仅完美解决了始于阿达玛的 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示问题，更重

要的是，实现了抽象函数（泛函）与具体函数的统一．函数解析性与综合性的统一，是分析学历史上的重大事件．

时隔五年之后，在 1914 年，里斯又回到 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示问题上，给出了这一定理的一种新的证明，他说：

“接下来，我想给出比前两个看起来更基本的证明方法．我的这个思想受勒贝格关于我 1909 年论文的注记以及单调函数序列在这类空间中的作用启发．[①]”

他的证明思想受到了勒贝格关于单调函数列相关问题的启发，即利用单调函数列将 $C[a,b]$ 上连续线性泛函 A 延拓到更广泛的函数空间——有界函数空间．这样 A 就可以作用在前面提到的函数 $f(x,\xi)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant \xi\\ 0, \xi\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 上，避免了对 f 连续性的限制，从而直接构造出有界变差函数 $\alpha(x)$．在一定意义上，里斯的方法中已经蕴含了泛函延拓与泛函限制的思想．

3.3.3　$L^p[a,b](p>1)$ 的对偶

1. $L^p[a,b](p>1)$ 的引入

我们知道

$$L^2[a,b]=\left\{f,\ \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x<\infty\right\}.$$

具备 $L^2[a,b]$ 的理论基础后，里斯在 1910 年发表于《数学年刊》的一篇文章“可积函数组的研究”[②]中，自然地将指数 2 推广到任意正数 p，引入

$$L^p[a,b]=\left\{f,\ \int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}\,x<\infty\right\},\quad p>1,$$

并在其上建立了全面而又丰富的空间理论．正如里斯所言：

“（其关于 $L^p[a,b]$ 的引入）为函数空间的公理化研究提供了有用素材．”

该文第一部分首先对勒贝格积分理论的建立过程做了简明而又全面的叙述，从简单函数的勒贝格积分出发，里斯给出了现代分析中对勒贝格积分建立过程的

① Riesz F. Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires [C]//Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1914, 31: 9-14.

② Riesz F. Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen [J]. Mathematische Annalen, 1910, 69(4): 449-497.

处理方式，这也表明里斯对勒贝格积分理论的娴熟掌握和理解．

第二部分根据勒贝格积分建立的过程，将有限求和形式的霍德尔不等式①和闵可夫斯基不等式②推广到勒贝格积分形式，即有

$$\left|\int_M f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_M |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}, p>1,$$

$$\left(\int_M |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_M |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, p>1.$$

第三部分给出 $L^p[a,b]$ 的定义，在文中里斯称之为“函数类（Funktionenklasse $[L^p]$）”，并表明 $L^p[a,b]$ 是线性的．这一部分在后面我们还将提到．

第四部分给出简单函数在 $L^p[a,b]$ 上稠密的结论．

【定理 3.4】 设 $f(x)\in L^p[a,b]$，则对任意 $\delta>0$，存在简单函数 $\varphi(x)$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p\,\mathrm{d}x \leqslant \delta^p.$$

第五部分考虑 $L^p[a,b]$ 中函数的不定积分，得出如下结论．

【定理 3.5】 $F(x)$ 是 $L^p[a,b]$ 上函数的不定积分当且仅当

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}}$$

有界，且与分割 (x_k, x_{k+1}) 无关．

第六部分给出 $L^p[a,b]$ 上的强收敛与弱收敛定义．

【定义 3】 设 $f_i(x), f(x)\in L^p[a,b]$，若

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^b |f(x)-f_i(x)|^p\,\mathrm{d}x = 0,$$

则称 $\{f_i(x)\}$ 按指数 p 强收敛于 $f(x)$．

【定义 4】 设 $f_i(x), f(x)\in L^p[a,b]$，若

Ⅰ． $\int_a^b |f_i(x)|^p\,\mathrm{d}x$ 一致有界，

---

① $\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．

② $\left(\sum_{k=1}^n |a_k+b|_k\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$．

Ⅱ. 对任意 $a \leqslant \xi \leqslant b$，$\lim_{i\to\infty}\int_a^{\xi} f_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$，

则称 $\{f_i(x)\}$ 按指数 p 弱收敛于 $f(x)$. 并证明了 $\{f_i(x)\}$ 按指数 p 弱收敛于 $f(x)$ 等价于：

Ⅰ. $\lim_{i\to\infty}\int_a^b f_i(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$，对任意 $g \in L^{\frac{p}{p-1}}$，

Ⅱ. $\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \overline{\lim_{i\to\infty}}\int_a^b |f_i(x)|^p \mathrm{d}x$.

第七部分给出弱收敛的主要结论.

【定理 3.6】若 $L^p[a,b]$ 上的一族函数满足如下条件：

Ⅰ. 是无限集，

Ⅱ. 关于指数是有界的，即对于该子集中的任意函数 $f(x)$，

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

一致有界，则该子集中存在子列按指数 p 弱收敛.

此即为 $L^p[a,b]$ 上的弱收敛定理. 作为该定理的一个应用，里斯将费舍尔定理推广到了所有 $p>1$ 的情形.

【定理 3.7】设 $\{f_i(x)\} \subset L^p[a,b]$，且

$$\lim_{i,j\to\infty}\int_a^b |f_i(x)-f_j(x)|^p \mathrm{d}x = 0,$$

则存在 $f(x)\in L^p$，使得 $\{f_i(x)\}$ 按指数 p 强收敛于 $f(x)$.

实际上，该定理表明 $L^p[a,b]$ 是完备的赋范线性空间.

尽管该文中里斯并没有在 $L^p[a,b]$ 上引入范数，而是沿用弗雷歇度量空间理论中的术语在 $L^p[a,b]$ 上引入度量，并证明其是一个完备的度量空间，但在空间理论的建立过程中，他认识到 $L^p[a,b]$ 上的线性性质，以及量

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \ (f(x)\in L^p[a,b])$$

在 $L^p[a,b]$ 上的重要性. 历史的发展也如其所言，他在 $L^p[a,b]$ 上的工作确实促进了后来赋范线性空间公理体系的建立.

2. $L^p[a,b]$ 的对偶

里斯 1910 年的这篇文章思想深邃，在泛函分析史上影响深远，贝恩科普夫称

其为“（里斯）最大的成就[①]”，迪厄多内也对其给予了很高的评价．这在数学史上使数学家真正意识到 $L^p[a,b]$ 与之前研究过的函数空间不同，用现代数学语言来说，$L^p[a,b]$ 是巴拿赫空间，而前面讨论的是希尔伯特空间．同时，也使得数学家们认识到了 $L^p[a,b]$ 与 $L^q[a,b]\left(q=\dfrac{p}{p-1}\right)$ 之间的对偶关系以及比函数空间更抽象的其他空间．下面对 $L^p[a,b]$ 与 $L^q[a,b]$ 之间对偶关系的产生过程进行重构．

在 1910 年的这篇文章中，里斯不仅对函数空间自身进行了研究，而且将积分方程（2-1-1）的求解推广到了条件 $f\in L^p[a,b]$ 上．但在推广时，他必须解决两个问题：

Ⅰ．如何限制核函数 K 才能使积分方程（2-1-1）有意义？即要满足：若 $\varphi(s)\in L^p[a,b]$，则

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\in L^p[a,b].$$

Ⅱ．如何解决？或者说，希尔伯特的方法是否也能进行推广？

对于问题Ⅰ，由积分方程（2-1-1）的形式，自然要求：对任意 $g\in L^p[a,b]$，$\int_a^b K(s,t)g(t)\,\mathrm{d}t$ 有意义，即

$$\int_a^b K(s,t)g(t)\,\mathrm{d}t\in L^p[a,b].$$

这样，通过核函数就建立了从 $L^p[a,b]$ 到其自身的一个（线性）映射或变换．里斯在该文的第十二部分中引入了 $L^p[a,b]$ 上有界线性变换（即有界线性算子）的概念 T．

T 是从 $L^p[a,b]$ 到其自身的一个线性变换，且存在常数 $M_T>0$，使得对任意 f，$\int_a^b|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\leqslant 1$，有

$$\int_a^b|Tf(x)|^p\,\mathrm{d}x\leqslant {M_T}^p.$$

这样的 T 是连续的，即保持 $L^p[a,b]$ 上的强收敛．这是从有限过渡到无限过程中对 T 的自然或必然要求．

① Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1966, 3(1): 1-96.

因此，只要由核函数定义的线性变换有界，积分方程（2-1-1）在空间 $L^p[a,b]$ 上就有了意义.

对于问题Ⅱ，仔细分析希尔伯特利用无穷线性方程组理论解式（2-1-1）（在 $C[a,b]$ 和后来里斯推广到 $L^2[a,b]$ 的情形）的过程，关键是建立了式（2-1-1）与式（2-2-16）的等价关系．在该文的引言中，里斯指出函数方程问题

$$\int_a^b f(x)\xi(x)\,\mathrm{d}\,x = c\text{，其中 }\xi(x)\text{ 是未知函数，}$$

在将 $L^2[a,b]$ 上的积分方程（2-1-1）代数化过程中起关键作用. 那么，在空间 $L^p[a,b]$ 上能否建立类似的等价关系呢？

分析式（2-2-16）我们看到，若 $\{\Phi_p\}$ 和 f 同属于 $L^p[a,b]$，则其积分的存在性并不能保证，更谈不上在该空间建立式（2-1-1）与式（2-2-16）的等价关系. 因此确定 $\{\Phi_p\}$ 所属的函数类，保证式（2-1-1）与式（2-2-16）的等价性成了首要问题.

利用对赫德尔不等式和闵可夫斯基不等式的推广，里斯认识到满足此要求的函数类只能在 $L^q[a,b]$ 中，并证明了：

对于任意 $g \in L^q[a,b]$，积分 $\int_a^b |f(s)g(s)|\,\mathrm{d}\,s < \infty$ 当且仅当 $f \in L^p[a,b]$. 并且关系式 $q = \dfrac{p}{p-1}$ 使里斯认识到 $L^2[a,b]$ 的特殊性. 他在文中也写道：

“关于这两类空间（$L^p[a,b]$，$L^q[a,b]$）的研究使我对 $L^2[a,b]$ 有了更深刻的认识①.”

由此里斯在 $L^p[a,b]$ 上建立了式（2-1-1）与

$$\int_a^b g(s)f(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_a^b g(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_a^b\int_a^b g(s)K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s, \quad g \in L^q[a,b] \tag{3-3-1}$$

的等价关系. 而要实现积分方程的代数化，对应于其建立 $L^2[a,b]$ 与 l^2 同构的过程，里斯在 $L^p[a,b]$ 上提出了相应的问题：积分方程组

$$\int_a^b g_n(s)f(s)\,\mathrm{d}\,s = c_n,\quad g_n \in L^q[a,b],\quad n = 1,2,\cdots \tag{3-3-2}$$

在系数 $\{c_n\}$ 满足什么条件时存在解 $f \in L^p[a,b]$？此时 $\{g_n\}$ 正交性的要求在该函数

① Riesz F. Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen [J]. Mathematische Annalen, 1910, 69(4): 449-497.

空间并不成立.

受希尔伯特和施密特在 l^2 上相应问题解的启发，在该文的第八部分和第九部分中，里斯创造性地给出了这一积分方程组问题的解存在的充要条件：

存在 $M>0$，对任意常数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n c_n\right| \leqslant M\left(\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{m} a_n g_n(s)\right|^q \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3-3-3}$$

在充分性的证明过程中，里斯首先考虑有限方程组的情形，将此问题转化为关于有限个变量函数的变分问题，在从有限情形过渡到无限情形时，充分应用了其在第七部分建立的弱收敛定理.

实际上，上述充要条件正是 $L^2[a,b]$ 上相应矩量问题的本质推广. 因为当 $p=2$ 时，$q=2$. 若 $\{g_n\}$ 是规范正交的，由 $L^2[a,b]$ 上的勾股公式（即庞德雅利金公式），上式右端即为

$$M\left(\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{m} a_n g_n(s)\right|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} = M\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\left(\int_a^b\left|g_n(s)\right|^2 \mathrm{d}s\right)\right)^{\frac{1}{2}} = M\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

不等式（3-3-3）成为

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n c_n\right| \leqslant M\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

由 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的任意性，得

$$\left(\sum_{n=1}^{m}|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M,$$

由 m 的任意性，此即表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \leqslant M$.

方程（3-3-2）的解的充要条件的给出，并没有像 $L^2[a,b]$ 与 l^2 同构那样建立起 $L^p[a,b]$ 与某个数列空间之间的对应，即使如 $L^2[a,b]$ 自然推广得到 $L^p[a,b]$ 一样，虽然由 l^2 也可自然推广得到 l^p 空间，但里斯在该文中也指出，当 $p\neq 2$ 时，$L^p[a,b]$ 与 l^p 不是同构的．这间接地表明在 $L^p[a,b]$ 上考虑积分方程（2-1-1）已不能像 $L^2[a,b]$ 上一样代数化.

尽管在 $L^p[a,b]$ 上积分方程（2-1-1）的求解不能像 $L^2[a,b]$ 上一样代数化，但里斯注意到由代数化引申出的问题可推广到一般情形，即对任意 $g\in L^q[a,b]$，

$$\int_a^b g(s)f(s)\,\mathrm{d}s=c_g$$

存在解 $f\in L^p[a,b]$ 的充要条件为：存在 $M>0$，对任意常数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，有

$$\left|\sum_{n=1}^m a_n c_{g_n}\right|\leqslant M\left(\int_a^b\left|\sum_{n=1}^m a_n g_n(s)\right|^q\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}.\tag{3-3-4}$$

同时里斯认识到 $L^p[a,b]$ 上一般情形问题解的存在性条件正好对应于 $L^q[a,b]$ 上泛函的有界线性性质，如图 3.8 所示.

Wird durch eine Vorschrift jeder Funktion $f(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ eine Zahl A_f zugeordnet, und genügt diese Zuordnung den Forderungen:

$$(30)\qquad\begin{cases}A_{\mu_1 f_1+\mu_2 f_2}=\mu_1 A_{f_1}+\mu_2 A_{f_2};\\ |A_f|\leqq M\left[\int\limits_a^b|f(x)|^{\frac{p}{p-1}}dx\right]^{\frac{p-1}{p}},\end{cases}$$

wo die Schranke M nur von der Vorschrift abhängt, so gibt es eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion $a(x)$ der Klasse $[L^p]$ derart, daß für alle $f(x)$

$$A_f=\int\limits_a^b a(x)f(x)\,dx$$

ist.

图 3.8　里斯关于 $L^q[a,b]$ 空间上的泛函表示

设 A 是 $L^q[a,b]$ 上的有界线性泛函，对任意 $g\in L^q[a,b]$，令 $A_g=c_g$，则对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $g_1,g_2,\cdots,g_m\in L^q[a,b]$，有

$$\left|\sum_{n=1}^m a_n c_{g_n}\right|=\left|\sum_{n=1}^m a_n A_{g_n}\right|=\left|A\sum_{n=1}^m a_n g_n\right|\leqslant M\left(\int_a^b\left|\sum_{n=1}^m a_n g_n(s)\right|^q\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}},$$

即 $\{c_g\}$ 满足条件（3-3-4），这表明对任意 $g\in L^q[a,b]$，积分方程

$$\int_a^b g(s)f(s)\,\mathrm{d}s=c_g$$

存在解 $f\in L^p[a,b]$. 因为 $A_g=c_g$，所以若 A 是 $L^q[a,b]$ 上的有界线性泛函，则存在 $f\in L^p[a,b]$ 使得

$$A_g = \int_a^b g(s) f(s) \mathrm{d} s .$$

由此不仅给出了 $L^q[a,b]$ 上有界线性泛函的表示，而且建立起 $L^q[a,b]$ 上有界线性泛函与 $L^p[a,b]$ 上元素之间一一对应的对偶关系.

有别于利用 $L^2[a,b]$ 与 l^2 的同构，由 l^2 上连续线性泛函的表示给出 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函的表示，在此里斯不仅表明 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函的表示是 $L^q[a,b]$ 上连续线性泛函表示的一种特殊情形，而且将该表示视为矩量问题的一种特殊情形. 这种将连续线性泛函的表示与矩量问题联系起来的思想，成为后来汉恩-巴拿赫泛函延拓定理的思想来源.

在该文中，里斯关于 $L^p[a,b]$ 的定义以及利用 $L^p[a,b]$ 来表示 $L^q[a,b]$ 上有界线性泛函的思想，为后来巴拿赫空间与对偶空间抽象理论的建立奠定了基础. 里斯建立了 $L^q[a,b]$ 上的连续（有界）线性泛函与 $L^p[a,b]$ 上的函数的一一对应关系，这种对应将 $L^p[a,b]$ 的空间结构以及其上的拓扑性质（范数、强收敛、弱收敛、弱*紧）赋予到 $L^q[a,b]$ 上的连续（有界）线性泛函上，从而明确表明具体函数空间 $L^q[a,b]$ 上的连续线性泛函也具有相应的空间结构和拓扑性质，而所有这些正是其后对偶空间抽象理论的本质内涵. 虽然对偶空间理论的建立是以巴拿赫空间理论的建立为基础的，但该文表明对偶空间和与其为基础的巴拿赫空间是相辅相成的，是同时产生和发展的.

另外，$L^p[a,b]$ ($p>1$)与 $L^q[a,b]$ 互为对偶的这种特殊性，不仅没有局限里斯对偶理论的普适性，反而造就了其后自反空间理论的产生与研究. 从这个角度而言，每个理论的局限性正是更广泛理论产生的土壤，正如希尔伯特代数化方法的局限性成就了里斯的对偶思想与理论.

由于在 $L^p[a,b]$ 上不能利用对偶空间思想将积分方程（2-1-1）代数化来达到求解的目的，受托普利兹（Otto Toeplitz，1881—1940 年）、希尔（George William Hill，1838—1914 年）等数学家算子思想的影响，里斯通过算子对积分方程（2-1-1）进行了分析.

前面已提到，为使积分方程（2-1-1）在 $L^p[a,b]$ 上有意义，里斯引入了 $L^p[a,b]$ 上有界线性算子的概念. 若定义 $L^p[a,b]$ 上的算子 K 如下：

$$(Kf)(s) = \int_a^b K(s,t) f(t) \mathrm{d} t , \quad f \in L^p[a,b] ,$$

E 表示 $L^p[a,b]$ 上的恒等算子，则积分方程（2-1-1）转化为算子方程

$$\left(E+K\right)\phi = f\,,$$

令 $T=E+K$ ，有

$$T\phi = f\,. \tag{3-3-5}$$

利用对偶思想由式(2-1-1)和式(3-3-1)等价可知，式(2-1-1)存在解 $\phi\in L^p[a,b]$ 当且仅当对任意 $g\in L^q[a,b]$，

$$\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b g(t)\phi(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b\left(\int_a^b K(s,t)g(s)\,\mathrm{d}\,s\right)\phi(t)\,\mathrm{d}\,t\,. \tag{3-3-6}$$

上式右边二重积分中的内积分对应 $L^q[a,b]$ 上的算子. 里斯在 $L^q[a,b]$ 上将算子 R 定义为

$$\left(Rg\right)(t) = \int_a^b K(s,t)g(s)\,\mathrm{d}\,s\,,$$

并且得到算子 K 与 R 有如下对偶关系，即对任意 $f\in L^p[a,b]$， $g\in L^q[a,b]$，有

$$\int_a^b (Kf)(s)g(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_a^b f(s)(Rg)(s)\,\mathrm{d}\,s\,.$$

里斯称 R 为 K 的对偶算子. 从而得到 $E+R$ 是 $E+K$ 的对偶算子，记 $\Gamma=E+R$. 里斯进一步得到，若 T 可逆，则 Γ 也可逆.

利用对偶算子，式（3-3-6）转化为对任意 $g\in L^q[a,b]$，

$$\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b (\Gamma g)(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

这表明 $L^p[a,b]$ 上的积分方程（2-1-1）存在解 $\varphi\in L^p[a,b]$ 当且仅当对任意 $g\in L^q[a,b]$， φ 满足上式. 而上式只是矩量问题的一种特殊形式. 若令

$$c_g = \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}\,t\,,$$

$$h_g(t) = (\Gamma g)(t) = g(t) + \int_a^b K(s,t)g(s)\,\mathrm{d}\,s\,,$$

则式（2-1-1）就转化为矩量问题：

$$\int_a^b h_g(t)\phi(t)\,\mathrm{d}\,t = c_g\,,\qquad h_g(t)\in L^q[a,b]\,.$$

这样，利用矩量问题的解就给出了积分方程（2-1-1）在 $L^p[a,b]$ 上解存在的条件，即积分方程（2-1-1）在 $L^p[a,b]$ 上存在解的充要条件是存在正常数 M，对任意常

数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{m}a_n c_{g_n}\right|\leqslant M\left(\int_a^b\left|\sum_{n=1}^{m}a_n h_{g_n}(t)\right|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由 $g\in L^q[a,b]$ 的任意性以及 c_g 和 $h_g(t)$ 关于 g 的线性性质，该充要条件又可表示为对任意 $g\in L^q[a,b]$，

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M\left(\int_a^b|h_g(t)|^q\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}=M\left(\int_a^b|(\Gamma g)(t)|^q\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.\qquad(3\text{-}3\text{-}7)$$

这一条件的给出将算子方程（3-3-5）解的存在性问题转化为其对偶算子的性质.

希尔伯特在 $C[a,b]$ 上给出方程（2-1-1）解的第一种情形是，对任意 $f\in C[a,b]$ 都存在唯一解，转化为算子的性质，即算子 T 可逆．因此，里斯进一步考虑了在什么条件下算子 T 在 $L^p[a,b]$ 上可逆.

利用式（3-3-7），里斯给出了 T 可逆的充要条件：存在正常数 M，使得对任意 $f\in L^p[a,b]$，$g\in L^q[a,b]$，有

$$\int_a^b|f(s)|^p\,\mathrm{d}s\leqslant M^p\int_a^b|Tf(s)|^p\,\mathrm{d}s\,,\qquad(3\text{-}3\text{-}8)$$

$$\int_a^b|g(s)|^q\,\mathrm{d}s\leqslant M^q\int_a^b|\Gamma g(s)|^q\,\mathrm{d}s\,.\qquad(3\text{-}3\text{-}9)$$

这是因为，对任意固定的 $f\in L^p[a,b]$，在任意 $g\in L^q[a,b]$ 时，由闵可夫斯基不等式和式（3-3-9）有

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t&\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^p\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(t)|^q\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant M\left(\int_a^b|f(t)|^p\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|\Gamma g(t)|^q\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

因此，对任意 $g\in L^q[a,b]$ 有

$$\int_a^b|f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant M\left(\int_a^b|f(t)|^p\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|h_g(t)|^q\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},$$

即式（3-3-7）. 这表明对任意固定的 $f\in L^p[a,b]$，方程（2-1-1）或者算子方程（3-3-5）存在解 $\varphi\in L^p[a,b]$，即有

$$T\phi=f\,.$$

从而表明T是满射．再由式（3-3-8）可知T是单射，因而T是双射，即可逆．

据此可以判断算子方程（3-3-5），即积分方程（2-1-1）是否对每个$f \in L^p[a,b]$都存在唯一解．从上面T可逆的充要条件中不难看出$L^p[a,b]$与$L^q[a,b]$对偶所发挥的作用．

随后，里斯考虑了$L^p[a,b]$上更一般的积分方程

$$f(s) = \phi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t \tag{3-3-10}$$

在λ满足什么条件时，对应的算子可逆．也就是说，对每个$f \in L^p[a,b]$，都存在唯一解．由此给出了重要的谱半径公式．

里斯 1910 年的这篇文章在泛函分析史上占有重要地位．$L^p[a,b]$的引入看似非常自然，却是从希尔伯特空间向巴拿赫空间迈进的关键一步，同时将希尔伯特通过内积使积分方程代数化的过程上升为相应空间上连续线性泛函的作用，使得隐藏在希尔伯特方法中的对偶思想更加明确．里斯也并没有拘泥于希尔伯特的代数化方法，进一步引入弗雷德霍姆和希尔积分方程中的算子思想，明确定义了$L^p[a,b]$上的有界线性算子，将相应积分方程转化为算子方程，开创了积分方程算子化的先河．

3.3.4 $l^p(p>1)$的对偶

1. $l^p(p>1)$的引入——从无穷线性方程组的解理论说起

尽管前面介绍了积分方程与无穷线性方程组之间的联系，但关于无穷线性方程组的早期研究是独立于积分方程的研究的．

一般认为无穷线性方程组的研究始于法国数学家傅里叶（Baron Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830 年）．傅里叶在热的解析理论研究中确定微分方程的解时，设解函数具有某种级数展开形式，其系数待定，由微分方程的边界条件得到关于待定系数的无穷线性方程组．

傅里叶开创了解无穷线性方程组的一种重要方法——退化原理：限制在前n个方程中的前n个未知量，其余未知量设为0，得到有限线性方程组，求出有限线性方程组的解，取极限即为给定无穷线性方程组的解．

由退化原理及行列式在有限线性方程组中的应用，美国数学家和天文学家希

尔引入了无限行列式，并利用有限行列式的一般法则来计算无限行列式，开启了无限行列式理论在无穷线性方程组中的应用.

作为数学家和物理学家的傅里叶和作为天文学家的希尔等人，他们关于无穷线性方程组的研究背景更多地来自实际问题，并没有考虑其所讨论无穷线性方程组中每个方程系数对应的无穷级数是否收敛，而且也不考虑其求解过程从有限过渡到无限的合法性，然而他们得到的解被其实验观察所证实．正如里斯对希尔的评价：

“（他的勇敢）最终被证明是成功的．[①]”

法国数学家庞加莱最先对他们的推导过程产生怀疑，他在《法国数学协会公告》上先后发表了两篇关于退化原理合法性的批判性文章[②③]，通过函数理论来说明这种方法的不严密性，并在第二篇文章中建立了无限行列式理论的基础，说明希尔等人工作的合理性．随后瑞典数学家科克（Helge von Koch，1870—1924 年）发展了无限行列式理论[④⑤]，由此开创了建立在无限行列式基础上的无穷线性方程组理论．该理论首先对无穷线性方程组中的系数附加限制条件，使其所对应的无限行列式有意义，在此基础上，寻求满足一定条件（如有界性等）的解.

里斯在其著作《关于无穷未知量线性方程组的研究》[⑥]的第二章中，详细说明了庞加莱的无限正规行列式理论在无穷线性方程组中的应用.

考虑无穷线性方程组

$$\begin{cases}(1+a_{11})x_1+a_{12}x_2+\cdots=c_1\\ a_{21}x_1+(1+a_{22})x_2+\cdots=c_2\\ \qquad\qquad\vdots\end{cases}, \tag{3-3-11}$$

式中 $x_1,x_2,\cdots$ 是未知量．设

① Riesz F. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913: 22.

② Poincaré H. Remarques sur l'emploi de la méthode précédente [J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1885, 13: 19-27.

③ Poincaré H. Sur les déterminants d'ordre infini [J]. Bulletin de la société mathématique de France, 1886, 14: 77-90.

④ Von Koch H. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires [J]. Acta mathematica, 1891, 15(1): 53-63.

⑤ Von Koch H. Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires [J]. Acta mathematica, 1892, 16(1): 217-295.

⑥ Riesz F. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913.

$$\sum_{i,k}|a_{ik}| = \sum_{i} A_k = A$$

收敛，则行列式列

$$\left\{ \Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1+a_{nn} \end{vmatrix} \right\}$$

是柯西列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n$ 存在，记 $\Delta = \lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n$， Δ 即为方程组（3-3-11）系数所对应的无限行列式.

若 $c_1, c_2, \cdots$ 有界，则用 $c_1, c_2, \cdots$ 来替换 Δ 中的某一列，如第 k 列，得到的无限行列式 Δ_k 仍收敛．当 $\Delta \neq 0$ 时，利用退化原理及有限线性方程组的克莱姆法则，得到方程组（3-3-11）存在唯一有界解：

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots.$$

科克所做的主要工作是，在方程组系数的较弱限制条件下仍保证无限行列式的收敛性.

希尔伯特在无限二次型理论的基础上，摆脱了无限行列式的方法，在无穷线性方程组系数所对应的双线型是完全连续的条件下，在 l^2 范围内给出了方程组（3-3-11）解的结构（见 2.2.2 节）.

施密特在 1908 年发表的题为“无穷变量线性方程组的求解”①一文中指出：

“（希尔伯特给出的）解的条件是建立在无限二次型理论的基础上的，而不是从无穷线性方程组本身和本质出发的.”

施密特还举出反例来说明即使希尔伯特的限制条件不满足，其解也可能存在．该文第二部分在第一部分关于 l^2 空间结构建立的基础上，在 l^2 空间的范围内确定解，其系数只需保证无穷线性方程组中每个方程对应级数收敛的条件下，从正交性的角度讨论了无穷线性方程组解的结构.

有了 L^p 的研究基础并受施密特思想的启发，里斯自然而然地定义了 l^p，

① Schmidt E. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 1908, 25(1): 53-77.

$$l^p = \left\{ a_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty \right\},$$

并在 l^p 范围内研究无穷线性方程组解的结构．但与 1910 年在“可积函数组的研究”一文中建立全面的 L^p 空间理论不同的是，里斯在其著作《关于无穷未知量线性方程组的研究》中并没有明确建立 l^p 空间理论．这可能源于施密特已经建立较完整的 l^2 空间理论．在该书的第四章，里斯给出了前几章所得到的主要结论在 l^2 上的应用，并指出：本章中的所有讨论很容易推广到 $p>1$ 的情形．在该书中，里斯首次称 l^2 空间为希尔伯特空间，然后定义了希尔伯特空间中的弱收敛和强收敛．

2. $l^p(p>1)$ 的对偶

在其著作中，里斯首先明确了研究无穷线性方程组的出发点：先确定解的范围，在此基础上，无穷线性方程组的系数只需保证无穷线性方程组自身有意义即可，即保证方程组左边的无穷级数收敛．对此，里斯写道：

“为了能将行列式中的经典方法应用到无穷维系统中，有必要强加一些或多或少的限制性条件，我也必须承认是这种方法需要这些限制条件，而不是问题本身．[①]”

里斯考虑无穷线性方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i, \quad i = 1,2,\cdots \tag{3-3-12}$$

满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ 的解 $\{x_k\}$ 存在的条件．

从线性方程组的本质出发，里斯首先需要确定线性方程组系数的范围或限制条件，由兰道（Edmund Landau，1877—1938 年）定理[②]：$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ 对所有 $\{x_k\} \in l^p$ 都收敛的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q < \infty$，由此引入 l^q．

对于这样的无穷线性方程组，里斯显然看到了其与 L^p 上积分方程组问题的相

① Riesz F. Les Systèmes d'equations linéaires a une Infinité d'Inconnues [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913: 42.

② Landau E. Über einen Konvergenzsatz [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1907, 1907: 25-27.

似性，因此采用几乎完全一样的方法，他给出了这类无穷线性方程组解存在的充要条件：存在正常数 M，对任意正整数 n，以及任意常数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，满足

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right| \leqslant M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3-3-13}$$

按照里斯在 L^p 上的工作，他本可以在此时也给出 l^p 上连续线性泛函的表示定理，但他并没有这样去做，而是将其得到的结论应用于 l^2 上的无穷线性方程组中，以此来说明其主要结论是对希尔伯特和施密特相应工作的推广.

无论是 l^2 还是 l^p，并没有文献明确给出其上连续线性泛函的表示形式，但从蕴含这一思想的角度来说，人们将 l^2 上连续线性泛函的表示工作归功于希尔伯特，将 l^p 上连续线性泛函的表示工作归功于里斯. 我们不妨给出 l^p 上连续线性泛函的形式：

设 f 是 $l^p(p>1)$ 上的连续线性泛函，则存在 $\{y_k\}\in l^q$，使得对任意 $\{x_k\}\in l^p$ 有

$$f\left(\{x_k\}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k .$$

3. 小结

相较于其在 L^p 上的工作，里斯在 l^p 上的工作没有得到相应的重视. 他也在该文的前言中谦虚地写道：

“个人而言，我对这些理论的贡献很少，之所以做这一工作，是因为受到我的与此相关研究的鼓励. ①”

虽然在 L^p 和 l^p 之间并没有像在 L^2 与 l^2 之间那样建立起同构关系，但里斯的这篇文章表明，数列空间与函数空间具有相似的空间结构，在积分方程中所使用的方法对于无穷线性方程组而言也是行之有效的. 这也为后来数列空间与函数空间抽象统一理论的建立奠定了基础.

里斯在该文中也统一了关于无穷线性方程组解理论的研究工作，他再次在 l^p 空间上引入了（有界线性）算子的概念，指出希尔伯特的无限二次型理论以及前人对无穷线性方程组解理论的研究都可转化为相应的算子理论.

① Riesz F. Les Systèmes d'equations linéaires a une Infinité d'Inconnues [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913: III.

3.3.5　l^1 的对偶

在 1913 年这本著作第三章的最后一部分，里斯分别考虑了无穷线性方程组（3-3-12）满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$$

和

$$\sup_k|x_k|<\infty$$

的解$\{x_k\}$存在的条件. 这实际上考虑的是方程组（3-3-12）的解在l^1和l^∞时的情形. 里斯指出，这两种情形不包括在前面关于$l^p(p>1)$的情形中，可分别视为$p\to 1$和$p\to\infty$的极限情形.

1. l^1 的前对偶

为了确定方程组（3-3-12）满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty$$

的解$\{x_k\}$（即$\{x_k\}\in l^1$）存在的条件，里斯指出对所有的i，要求

$$\lim_{k\to\infty}a_{ik}=0 . \tag{3-3-14}$$

这一要求与之前对方程组（3-3-12）存在解$\{x_k\}\in l^p$的要求稍有不同，因为要保证方程组（3-3-12）存在的解$\{x_k\}\in l^1$有意义，即要保证级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k \tag{3-3-15}$$

对所有的$\{x_k\}\in l^1$收敛，里斯也提到“有必要假定$|a_k|(k=1,2,\cdots)$有界”，即要求$\{a_k\}\in l^\infty$.

但里斯解释道，我们更需要的是对l^1上的一致有界点列来说，其所对应的级数列（3-3-15）也是一致收敛的. 因此，特别地取$x_i=G>0$，当$i=k$时；$x_i=0$，当$i\neq k$时；则存在N，有$Ga_{N+1},Ga_{N+2},\cdots$收敛于0，即

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0 .$$

正如里斯所言，这一条件受其所采用方法的限制.

有了以上的条件限制，里斯得到l^1上无穷线性方程组（3-3-12）解存在的充要条件.

【定理 3.8】方程组（3-3-12）存在解$\{x_k\}$且$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\leqslant M$的充要条件是：对任意正整数$n$以及任意常数$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，满足

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right|\leqslant M\sup_k\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|\right). \tag{3-3-16}$$

里斯指出该定理证明的关键是有限线性方程组的情形. 在此前提下，可利用与$p>1$时相应的过程过渡到可数情形. 也就是说，在l^1上也存在类似的弱收敛定理.

与前面$p>1$时有限线性方程组情形的证明完全不同. 对于方程组（3-3-12）的前n个方程

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-3-17}$$

来说，若满足条件（3-3-16），因为$\lim\limits_{k\to\infty}a_{ik}=0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sup_k\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|\right)$$

只依赖于有限个指标k，不妨设$k\leqslant m$. 这样，前n个无穷变量线性方程组可被m个变量的线性方程组

$$\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_k=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-3-18}$$

替代.

如果方程组（3-3-18）有解$\{x_k\}_{k=1}^{m}$，那么令$x_{m+1}=0,x_{m+2}=0,\cdots$就能得到方程组（3-3-17）的解.

因此，问题转化为方程组（3-3-18）在条件

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right|\leqslant M\sup_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|\right) \tag{3-3-19}$$

下存在解$\{x_k\}_{k=1}^m$且$\sum_{k=1}^m |x_k| \leqslant M$.

在接下来的推导过程中，里斯表明了为什么将$p=1$视为一种极限情形．因为对任意$p>1$，

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\left|\sum_{i=1}^n \mu_i a_{ik}\right|\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^m \left|\sum_{i=1}^n \mu_i a_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

因此条件（3-3-19）又转化为

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu_i c_i\right| \leqslant M\left(\sum_{k=1}^m \left|\sum_{i=1}^n \mu_i a_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由前面关于$p>1$的结论，此时对任意$p>1$，方程组（3-3-18）存在解

$$\left\{x_k^{(p)}\right\}_{k=1}^m,$$

且

$$\sum_{k=1}^m \left|x_k^{(p)}\right| \leqslant M^p.$$

因此对任意$k=1,2,\cdots,m$，

$$\left|x_k^{(p)}\right| \leqslant M\ (p>1),$$

故存在$p_1, p_2, \cdots$，使得

$$x_k^* = \lim_{p_v\to 1} x_k^{(p_v)}, \quad k=1,2,\cdots,m.$$

显然$\left\{x_k^*\right\}_{k=1}^m$是方程组（3-3-18）的解，且

$$\sum_{k=1}^m \left|x_k^*\right| = \lim_{p_v\to 1}\sum_{k=1}^m \left|x_k^{(p_v)}\right|^{p_v} \leqslant \lim_{p\to 1} M^p = M.$$

2.　l^1 的对偶

为了确定方程组（3-3-12）存在解的另一种极限情形，即满足条件

$$\sup_k |x_k| < \infty$$

的解$\{x_k\}$，此时要求系数满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{ik}\right|<\infty\text{，}\quad i=1,2,\cdots.$$

这样能保证方程组（3-3-12）左侧的级数都是收敛的．在这样的条件下得到如下结论．

【定理 3.9】方程组（3-3-12）存在解 $\{x_k\}$ 且 $\sup\limits_{k}|x_k|\leqslant M$ 的充要条件是：对任意正整数 n 以及任意常数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，满足

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right|\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|. \tag{3-3-20}$$

这种情形之所以称为 $p\to\infty$ 时的极限情形，是因为（以上 q 都等于 $\dfrac{p}{p-1}$）

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

在 $p\to\infty$ 时趋于1，并且关于 μ 是一致收敛的．因此对 $\varepsilon>0$，当 p 充分大时，条件（3-3-20）转化为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i c_i\right|\leqslant(M+\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_{ik}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

从而又可以利用前面关于 $p>1$ 时的结论．

3. 小结

在 $l^p(p>1)$ 上考虑方程组（3-3-12）的解时，我们看到系数要求在 l^q 上；当解在 l^q 上时，由 p 和 q 之间的关系，此时系数要求在 l^p 上．

在 l^1 上考虑方程组（3-3-12）的解时，里斯指出此时不仅要求系数在 l^∞ 上，而且要求在其子空间 c_0（极限为 0 的数列构成的空间）上．反过来，在 l^∞ 上考虑方程组（3-3-12）的解时，要求方程组系数在 l^1 上．

在相应空间结论的证明过程中，里斯也解释了解在 l^1 上时对系数的要求．但从后续发展来看，这实际上涉及空间的自反性，即 $l^p(p>1)$ 的对偶空间的对偶空

间依旧是其自身，也就是说，$l^p(p>1)$ 具有自反性，而对于 l^1 来说，其对偶空间是 l^∞，但 l^∞ 的对偶空间不再是 l^1，l^1 是 c_0 的对偶空间，或者说 l^1 的前对偶空间是 c_0.

尽管空间的自反性与非自反性还未被当时的数学家所认识，但里斯对于求解无穷线性方程组（3-3-12）给出了恰当的空间考虑，这种伟大数学家所特有的对问题的深邃洞察力不得不令人叹服.

3.4　弗雷歇与里斯泛函表示工作比较

弗雷歇是抽象空间理论的创立者，里斯是泛函分析理论的奠基者，二人都在泛函表示方面做了重要工作，但他们的处理方式相异．显然，弗雷歇和里斯对同一问题的不同处理方式与其思想方法密切相关，但鲜有文献对他们在这一工作中所表达的思想方法进行具体的比较和分析．数学思想始终是数学史研究所应关注的主题，在很大程度上，数学史就是数学思想史．本节我们从目的、方法、影响三方面对他们的泛函表示工作进行分析和比较，试图还原他们工作之间的联系与区别，解析其中所蕴含的数学思想与内在本质，以期对他们在对偶方面的工作给出合理界定.

3.4.1　动机与目的

1. 弗雷歇的动机与目的

弗雷歇关于泛函的表示工作始于其导师阿达玛 1903 年发表的一篇短注，在该文中阿达玛给出了 $C[a,b]$ 上泛函的一种积分极限的表示形式．弗雷歇以此为出发点，于 1904 年至 1907 年发表了三篇关于泛函表示的文章，构成其抽象分析理论的一部分.

对相关文献分析可知，弗雷歇专注于泛函表示工作，并未涉及表示工作之外的其他研究，这与其抽象分析理论的建立框架一致，其目的就是要给出由沃尔泰拉创立的泛函的解析表示，试图通过具体函数来表示抽象的泛函．弗雷歇从横（函数的范围）、纵（表示的形式）两方面对泛函的表示问题进行了深入探讨，渗透了他对这一问题的思考和认识，这在其 1905 年的文章中表现尤为突出．在该文中，弗雷歇

并未给出令人满意的结果，更多的是阐述了他对这一问题的深思，但正是这些思考，使他认识到更广泛的函数空间及其上泛函更一般的表达形式，这为其在第三篇文章中对泛函表示问题的突破奠定了基础．正如杜格所言：

“（弗雷歇）在泛函上的兴趣以及关于它们的表示毫无疑问持续了十年多，在此期间，他不断（对这一问题）批判、重证、推广和改进”．①

可以说，弗雷歇关于泛函表示的工作是在抽象综合观点下对这一抽象概念的解析分析．

2. 里斯的动机与目的

里斯关于泛函的表示工作始于其对希尔伯特积分方程理论的研究，在里斯-费舍尔定理的应用中，他提到关于 $L^2[a,b]$ 上泛函的表示，这也是他在泛函表示方面的最初工作．随后里斯完全解决了始于阿达玛并经弗雷歇深入探讨的 $C[a,b]$ 上泛函的表示问题，$L^p[a,b]$、l^p 以及希尔伯特空间上泛函的表示问题，共发表了五篇文章，时间跨度达 20 年．

由原始文献的挖掘可知，里斯的泛函表示工作始终与求解方程问题相结合．除 $C[a,b]$ 上泛函的表示工作外，里斯早期在（函数或序列）空间上泛函的表示工作总是穿插在其对（积分或无穷维线性）方程（组）的研究中，这表明里斯最初并非以解决泛函的表示问题为主要或唯一目的，这在后人归功于里斯的 l^p 上的泛函表示工作中表现得更为突出，l^p 上泛函的表示只是隐含在其对无穷线性方程组的研究中，他并没有提及．即使是在 $C[a,b]$ 上泛函的表示工作，之后也被应用到奇异积分方程理论的研究中．

3.4.2 思想与方法

1. 弗雷歇的思想与方法

在泛函表示工作中，弗雷歇摒弃了阿达玛从函数积分表达形式出发的方法．无论是 $C[a,b]$ 还是 $L^2[a,b]$，弗雷歇都从所考虑函数空间中函数的（广义）傅里叶级数表示形式出发，这些级数按照其所在函数空间中的距离收敛，再由泛函的连续

① Gray J. D. The shaping of the Riesz representation theorem: A chapter in the history of analysis [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1984, 31(2) : 127-187.

线性性质，作用在函数上的泛函就等于作用在级数中的每一项后得到的级数．这样，类似于函数的幂级数表示形式就给出了泛函的一种级数表示形式．阿达玛的工作促使弗雷歇在级数表示基础上进一步表示为积分（极限）的形式．纵观弗雷歇在此方面的工作，我们可构造一个简单模型来说明其思想与方法．

设 X 是所考虑的函数空间，U 是 X 上的连续线性泛函，对任意 $f \in X$，都有级数表示

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n ,$$

式中 $\{g_n\}$ 是 X 中固定的函数列，$\{a_n\}$ 是由 f 确定的系数，且级数按照 X 中的距离收敛，这样由 U 的连续线性性质得

$$Uf = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U g_n .$$

令 $c_n = Ug_n$，则

$$Uf = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n ,$$

式中 c_n 由 U 和 $\{g_n\}$ 唯一确定，与 f 无关．

弗雷歇的突破之处在于对 $\{c_n\}$ 继续分析，进一步确定 $\{c_n\}$ 可能是哪个函数的（广义）傅里叶系数，并由此构造出该函数，从而给出泛函的积分（极限）的表达形式．这一突破的成功之处在于给出了 $L^2[a,b]$ 上泛函的完全表示，其局限之处也在于完全依赖所考虑空间中函数的解析表示，弗雷歇已具有空间的思想，但没有从空间的整体出发．

2. 里斯的思想与方法

分析里斯的泛函表示工作，可看到他是从该函数空间上泛函可能具有何种表示形式出发，然后证明该函数空间上的泛函确实具有此形式的．最典型的例子为 $C[a,b]$ 上泛函的表示，里斯首先认识到黎曼–斯蒂尔杰斯积分就能表示 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函，接着他通过 $C[a,b]$ 上的泛函去构造可能被用来表示该泛函的有界变差函数．同样，在 $L^p[a,b]$ 上泛函的表示工作中，他首先认识到 $L^q[a,b]$ 中的任意一个函数与 $L^p[a,b]$ 上函数乘积的勒贝格积分确定了 $L^p[a,b]$ 上

的一个泛函，接着利用 $L^p[a,b]$ 上的泛函去构造可能被用来表示该泛函的 $L^q[a,b]$ 上的函数.

在对泛函认识和构造函数的过程中，里斯的一个重要思想是，认识到并充分利用连续线性泛函的有界性，从中可看到里斯对黎曼-斯蒂尔杰斯积分和勒贝格积分的娴熟运用. 里斯的另一重要思想是，在泛函表示与某类积分方程解的存在条件之间建立了等价关系. 著名数学史家迪厄多内称“（里斯的方法）是与盛行于所在时代线性代数概念的完全脱离”[①]. 可以说此时里斯已经具有非常明确的空间思想，与弗雷歇局限于空间中每一个函数的具体表达形式不同，他是从空间整体出发来考虑其上的连续线性泛函的.

3. 弗雷歇和里斯关于 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函表示思想分析

弗雷歇和里斯同年（1907 年）在同一期刊上发表了关于 $L^2[a,b]$ 上泛函的表示工作，而且在此前后，二人在学术交流上通信频繁，信中或多或少都提到了自己或对方的工作，可以说二人在这同一工作中互相促进并启发，但其主要思想又是互相独立的.

结合里斯和弗雷歇的具体文献，我们看到弗雷歇关于 $L^2[a,b]$ 上泛函的表示工作只是其文献[②]的一部分（第二部分，该文共分三部分）. 在该文中，弗雷歇首先研究了有界可测函数空间上的泛函表示，在第三部分中又研究了几类其他函数空间上的泛函表示，这几类函数空间上的表示方法与上文提到的模式完全一致，都是以函数的（广义）傅里叶级数为出发点的. 弗雷歇得到 $L^2[a,b]$ 上泛函的完全表示在一定程度上是一种巧合，其方法正好与 $L^2[a,b]$ 上函数的性质相吻合，同样的方法对于有界可测函数空间，他只能给出其上泛函积分极限的表示形式而没有给出完全表示也印证了这一点.

里斯关于 $L^2[a,b]$ 上泛函的表示是后来被称为里斯-费舍尔定理的一个应用，应该说里斯是通过 $L^2[a,b]$ 与 l^2 之间的同构，间接给出 $L^2[a,b]$ 上泛函的完全表示的. 从里斯随后关于 $C[a,b]$ 和 $L^p[a,b]$ 上泛函表示中的思想和方法来看，其自成一

① Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981.

② Fréchet M. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 1414-1416.

派，与弗雷歇的方法完全相异．但里斯进入 $L^2[a,b]$ 上泛函表示的研究领域应该受到了弗雷歇在此方面工作的影响，因为在此之前里斯的工作中并没有涉及任何泛函表示的问题．

3.4.3　贡献与影响

从历史发展的角度来看，显然里斯的泛函表示理论影响深远．但不可否认，正是因为弗雷歇对阿达玛工作的延续和深入研究，使得泛函表示为里斯等人所熟知，可以说泛函表示理论开创于阿达玛，得到弗雷歇的传承和发扬后，由里斯达到极致．

在方法上，虽然弗雷歇没有划时代的突破，但从其相关文献可知，他一直在不断思考泛函表示问题．所考虑（函数）空间的范围摆脱了连续函数空间的限制，他将泛函表示的函数空间从 $C[a,b]$ 拓展到有界可测函数空间，再到 $L^2[a,b]$ 等，为更广泛函数空间上的泛函表示提供了基础．他考虑利用积分来表示泛函的条件，这一探索开启了新的前景，里斯的工作使这一探索变成现实；同时他也认识到泛函表示的丰富性，在其 1904 年的文献中，弗雷歇就已经认识到可通过非连续函数，甚至勒贝格积分表示 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函；他也利用泛函来构造函数，这一思想与里斯利用泛函作用在特殊函数上来构造函数的思想有异曲同工之妙．

里斯在泛函表示方面的工作不仅给出了这些抽象概念的解析表示，实现了利用函数（或向量）来表示泛函的这一目标，更重要的是，他使用的方法和其中所蕴含的对偶思想为后来汉恩-巴拿赫泛函延拓定理的形成提供了思想；在泛函中渗透的空间思想为对偶空间理论的建立奠定了基础；间接促进了分析学家对自反空间的认识；为对偶算子理论的建立奠定了基础．由于里斯思想和方法的深远影响，后人将泛函表示方面的工作统称为里斯表示定理．

由以上分析知，弗雷歇和里斯关于泛函表示的出发点与方法不同．弗雷歇试图对泛函建立与函数类似的理论，给出泛函的解析表示；而里斯在对积分方程的研究中建立了积分方程与泛函表示之间的联系．弗雷歇过分依赖于同时代函数级数的表达形式，所得结果有一定局限性，除 $L^2[a,b]$ 上的泛函表示外，其余空间上的表示未摆脱极限束缚；而里斯从泛函与空间的整体思想出发，给出了具体空间上连续线性泛函的完全表示．在泛函表示方面，他们出发点、方法的差异使得其

产生的影响和贡献也不尽相同．弗雷歇使泛函表示得以传承和发扬，而里斯使泛函表示成为对偶空间理论的重要部分．二人对同一问题研究风格的不同与其学习和工作经历不无关系．弗雷歇受法国学派与其导师阿达玛的影响，称阿达玛为其“精神之父”，因此弗雷歇更多地以综合思想为主导，侧重于抽象概念一般理论的建立．而里斯兼具法国学派的综合思想和德国学派的解析思想，被誉为数学界的外交家，他侧重于具体空间中的问题研究，但在具体问题的研究中又蕴含着深刻的抽象理论，因而被称为泛函分析的奠基者之一．

3.5　斯坦豪斯的对偶工作

从以上关于里斯工作的回顾和分析，我们可以猜想：$L^1[a,b]$空间及其对偶空间的引入与研究也应该非里斯莫属，但历史并非如此．从里斯前面的工作可以看到，几类重要空间的对偶空间的刻画蕴含在里斯对积分方程和无穷线性方程组问题的研究中．也就是说，里斯研究的重心是在积分方程和线性方程组解的结构．希尔伯特代数化的方法在$L^p[a,b]$空间上的无能为力也宣告了积分方程代数化时代的结束，而里斯引入算子与对偶算子标志着积分方程和无穷线性方程组算子化或分析化时代的开始，以及统一化研究（将积分方程和无穷线性方程都纳入算子方程的范畴）的开始．沿着这个方向，里斯在1916年发表了题为“关于线性泛函方程”[①]的文章，建立了紧算子理论．

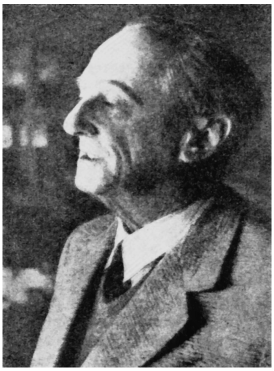

图 3.9　斯坦豪斯

但$L^1[a,b]$空间的对偶空间的建立归功于波兰数学家和教育家斯坦豪斯(见图3.9)．他在希尔伯特指导下于1911年获得哥廷根大学的博士学位，后来成为利沃夫 Jan Kazimierz 大学的教授，与巴拿赫在利沃夫创立了波兰泛函分析学派，是该学派的代表人物之一，他们还创建了 *Studia Mathematica* 杂志，该杂志是体现巴拿赫空间理论的最重要的来源．斯坦豪斯早期深受勒贝格积分理论的影响，在级数论方面贡献卓著[②]．他博士毕业后于1912年左右研究了勒

① Riesz F. Über lineare Funktionalgleichungen [J]. Acta Mathematica, 1916, 41(1): 71-98.

② [法]尚巴达尔著．吴越恩，叶厚荣译．数学词典[M]．北京：高等教育出版社，1989.

贝格的两本杰作《积分和原函数的研究教程》[①]和《三角级数教程》[②]．1916 年斯坦豪斯在克拉科夫的一个公园散步时，偶遇巴拿赫，从此与巴拿赫合作开始了对泛函分析的研究．斯坦豪斯认为巴拿赫是他“最伟大的数学发现[③]”．

有别于里斯沿着求解积分方程（2-1-1）的路线产生对偶空间的思想，斯坦豪斯于 1919 年在 *Mathematische Zeitschrift* 杂志发表了题为“可加连续的泛函演算”[④]一文，从级数的角度给出了 $L^1[a,b]$ 空间上连续线性泛函的表示．

3.5.1　$L^1[a,b]$，$L^\infty[a,b]$ 的引入

在该文中，斯坦豪斯分别用 S，S^2 和 B 来表示 $[a,b]$ 上勒贝格可积函数全体、勒贝格平方可积函数全体以及本性有界勒贝格可测函数全体，并在三类函数集合中引入两种度量：

Ⅰ．$d(X,Y)=\int_a^b\left|X(t)-Y(t)\right|\mathrm{d}t$；

Ⅱ．$d(X,Y)=\left(\int_a^b\left|X(t)-Y(t)\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$．

他分别用 SI , S^2II , BI ,$\cdots$ 来表示不同集合在不同度量下产生的空间，表明了同一集合可以定义不同的度量．

实际上，SI 即为 $L^1[a,b]$，而 S^2II 即为 $L^2[a,b]$．他首次提到了本性有界函数集 B 上的（范）数．

设 B_M 表示在 $[a,b]$ 上函数值几乎处处不超过 M 的勒贝格可测函数全体．最小的 M 称为该函数的“本性上极限”，即若 $X\in B_M$，则

$$ess\sup X=\inf\left\{M,\left|X(t)\right|\underset{a.e.[a,b]}{\leqslant}M\right\},$$

$B=\bigcup B_M$．但他仅仅是提到而已，由此产生的空间结构在文中并没有起到任何实质性作用，可以猜测此时的斯坦豪斯并不是很关心函数的空间理论．

① Lebesgue H. L. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1904.

② Lebesgue H. L. Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1906.

③ Kac, M. Hugo Steinhaus – A Reminiscence and a Tribute [J]. The American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America), 1974, 81 (6): 572-581.

④ Steinhaus H. Additive und stetige Funktionaloperationen [J]. Mathematische Zeitschrift, 1919, 5(3): 186-221.

因此该文只是单纯地引入了三类集合及两类度量，以此在这些集合与度量结合产生的空间上能定义恰当的收敛性与其上线性泛函的连续性.

3.5.2 $L^1[a,b]$ 上的连续线性泛函

斯坦豪斯认识到了不同集合与不同度量结合产生各种空间之间的关联性. 例如，

$$L^2[a,b] = S^2 II \subset S^2 I \subset SI = L^1[a,b],$$

这一关系表明集合 S^2 在度量 I 下是 SI 的子空间，同时 S^2 中的函数列 $\{X_n(t)\}$ 在度量 II 下收敛于 $X(t)$，$\{X_n(t)\}$ 在度量 I 下也收敛于 $X(t)$.

这种联系表明，若 F 是 $SI = L^1[a,b]$ 上的连续线性泛函，则 F 也是 $S^2 II = L^2[a,b]$ 上的连续线性泛函，从而由 $L^2[a,b]$ 上连续线性泛函的表示，给出 F 的表达形式. 我们知道由里斯和弗雷歇的结论，F 是 $S^2 II = L^2[a,b]$ 上的连续线性泛函，则存在

$$H(t) \in L^2[a,b]$$

使得

$$F(X) = \int_a^b X(t)H(t)\,\mathrm{d}t, \quad X(t) \in L^2[a,b].$$

显然，此时 F 的表示形式还不完全是 $SI = L^1[a,b]$ 上的连续线性泛函.

斯坦豪斯从弗雷歇、里斯等人连续线性泛函的表示工作中，特别是里斯工作中的对偶性，认识到 $H(t)$ 应该属于 B. 因此他证明了若 $H(t) \notin B$，则存在 $\{X_n(t)\} \subset S^2$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |X_n(t)|\,\mathrm{d}t = 0,$$

但

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b X_n(t)H(t)\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

这与 F 是 SI 上的连续线性泛函矛盾. 从而得到下面的结论.

【定理 3.10】 SI 上的每个连续线性泛函 F 具有形式

$$F(X) = \int_a^b X(t)H(t)\,\mathrm{d}t, \quad X(t) \in SI,$$

式中，$H(t) \in B$.

斯坦豪斯巧妙地将一个空间上连续线性泛函的刻画转化为已有空间上连续线性泛函的刻画，这一思想也体现在该文中关于 BI 上连续线性泛函的刻画中. 他利用 $C[a,b] \subset BI$ 及里斯关于 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示，给出了 BI 上连续线性泛函的表示.

这种通过限制空间的方法给出原空间上连续线性泛函的刻画与 3.3.2 节中提到的里斯在 1914 年通过延拓的方法给出 $C[a,b]$ 上连续线性泛函表示的又一证明相对应.

3.5.3　在级数收敛中的应用

在该文最后，斯坦豪斯给出了他的连续线性泛函表示结论在级数中的应用，这实际上也表明了其研究的初衷，从中也能看到弗雷歇连续线性泛函表示工作对他的影响.

弗雷歇利用空间中函数的级数表示刻画空间上的连续线性泛函，斯坦豪斯看到这种方法的可逆性：利用空间上连续线性泛函的表示研究级数的问题.

斯坦豪斯首先引入坐标概念，将上面的定理转化为级数的形式.

S 中点 X 的坐标指的是数集

$$\left\{\int_a^b X(t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t\right\}_{k=1}^{\infty},$$

式中 $\{\varphi_k(t)\}$ 是 $[a,b]$ 上的完备正交系，这样的函数系称为 T-系，即三角系. 如

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}},\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(2\pi\frac{t-a}{b-a}\right),\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(2\pi\frac{t-a}{b-a}\right),\cdots.$$

【定理 3.11】选用 T-系作为坐标系，则对于 SI 上的每个连续线性泛函 F 都具有形式

$$F(X) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k ,$$

式中 h_k, x_k 分别是 H 和 X 关于 T-系的坐标，而“$\doteq$”表示级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ 是按照切萨罗平均收敛①的.

---

① $\sigma \doteq v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$，$\sigma = \lim\limits_{n=\infty}\sigma_n$，其中 $\sigma_n = \dfrac{s_0 + \cdots + s_n}{n} = \dfrac{nv_0 + (n-1)v_1 + \cdots + v_n}{n}$.

反之，若线性形式

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

对所有 S 中的点 X 在 T-系下的坐标序列 $\{x_k\}$ 按照切萨罗平均收敛，则 $\{h_k\}$ 一定是 B 中点 H 在 T-系下的坐标序列，且该线型表示 SI 上的一个连续线性泛函.

由此定理，他得到连续线性泛函表示在级数中的应用.

【定理 3.12】数列 $\{\lambda_k\}$ 将每个傅里叶级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \psi_k(t)$$

转化为傅里叶级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k \psi_k(t),$$

当且仅当 $\{\lambda_k\}$ 将有界函数的傅里叶序列转化为有界函数的傅里叶序列.

3.6 小结

从集合角度而言，一个赋范线性空间的对偶空间是由该空间上所有连续线性泛函构成的集合．尽管在希尔伯特的积分方程工作之前，阿达玛、弗雷歇等人已经开始了 $C[a,b]$ 上连续线性泛函表示工作的研究，但受当时函数级数表示思想的影响，他们更关注连续线性泛函表示的形式问题，还没有连续线性泛函构成空间的思想，未能从整体上认识这些连续线性泛函.

从对希尔伯特一直到里斯相关工作的分析中，不难看出对偶空间的思想更多地起源于对积分方程求解理论的研究，在这个过程中里斯的一系列工作起关键作用．里斯并不是从某一空间上连续线性泛函的表示问题出发的，而是从具体的方程问题出发的，将积分方程的求解问题与相应空间上连续线性泛函的表示问题结合起来，得以从更高的视角关注分析学中的具体问题．里斯通过求解具体空间上的积分方程或线性方程组给出了 $L^p[a,b]$，l^p 等空间上连续线性泛函的表示形式，同时还认识到连续线性泛函的有界性本质，并由此给出了 $C[a,b]$ 上的泛函表示．他不仅解决了具体空间上的方程问题，给出了相应空间上连续线性泛函的表示，更

重要的是，揭示了这些空间上连续线性泛函的本质以及所具有的空间属性，得以从整体上研究连续线性泛函．里斯这一深邃超前的卓越思想正是引申出其后一般空间上“连续线性泛函存在性”这一根本问题的出发点，这些都为抽象对偶空间理论的建立和发展奠定了基础，指明了方向．

3.3 节主要讨论了里斯在具体对偶空间方面的工作，他虽然未给出对偶空间的抽象定义，但其思想方法深邃超前，善于用一般方法研究具体问题，极大地促进了泛函分析学科的发展，是泛函分析的重要奠基者之一．德国数学家罗戈辛斯基（Werner Wolfgang Rogosinski，1894—1964 年）这样评价里斯的思想风格：

“里斯的工作不仅因其方法独特、结论重要而影响深远，而且因其对数学敏锐的感知和判断……他的文章，无论是用匈牙利语写的，还是用法语或德语写的，都值得细细研读．越了解他的思想，就越能感受到其中所传达的愉悦，而这正是老一辈数学家对我们即将失去的这种感受的一种提醒．对里斯而言，不是为了结构而抽象，他总是能寻求抽象理论在具体情形中的运用．[①]”

斯坦豪斯的对偶工作虽然不如里斯的影响深远，但透过他的思想我们看到了连续线性泛函与级数间的关系，认识到了经典分析与现代分析[②]的紧密联系．

① Rogosinski W. W. Frederic Riesz [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1956, 1(4): 508-512.

② 人们往往把勒贝格以前的分析学称为经典分析，而把以勒贝格积分引出的实变函数论为基础而开拓出来的分析学称为现代分析学．

第 4 章　抽象对偶空间理论的建立

如前所述，基于不同空间上的积分方程求解的具体问题产生了不同的具体对偶空间，这些思想方法也引起了一大批追随者的兴趣．在 20 世纪数学更加抽象化和统一化的思潮驱使下，顺应结构数学发展的潮流，产生了用统一的一般观点考虑所有这些具体对偶空间的必要性．这些思想经过奥地利数学家黑利、汉恩和波兰数学家巴拿赫等人的进一步抽象，逐步建立了抽象的对偶空间理论．

本章从重要数学家各自的工作出发，详细分析解读他们有关对偶空间理论的工作，深刻挖掘其中蕴含的数学思想及其对泛函分析发展的影响．

4.1　黑利的对偶空间工作

图 4.1　黑利

黑利（见图 4.1）1884 年出生于维也纳，1943 年在芝加哥去世．1907 年，黑利在维也纳大学获得博士学位，之后获得在哥廷根大学学习的一笔奖学金，参加了希尔伯特-闵可夫斯基关于数学物理问题的讨论班．1908 年他回到维也纳大学，一直作为助教、教科书编辑者，直到第一次世界大战之前．1912 年，黑利发表了其在泛函分析方面的第一篇论文，讨论了与里斯在 1911 年发表的一个结论相关的积分方程问题．1921 年，他发表了“关于无穷未知量的线性方程组”[①]一文，迪厄多内称“该文也可视为泛函分析史上的里程碑”[②]．黑利从施密特和里斯关于无穷未知量的无穷线性方程组解存在的问

① Helly E. Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [J]. Monatshefte für Mathematik, 1921, 31(1): 60-91.

② Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 130.

题中，得到了关于序列空间上连续线性泛函的抽象理论.

4.1.1　问题与目标

在分析黑利的对偶思想之前，我们回顾一下促使里斯产生对偶思想的问题及其解决问题的方法.

无论是 $L^p(p>1)$ 还是 $l^p(p>1)$ 上的对偶思想，里斯的问题出发点本质上是一样的.

对于 L^p，里斯考虑积分方程组

$$\int_a^b g_i(s)f(s)\,\mathrm{d}s=c_i\,,\quad i=1,2,\cdots,$$

的求解问题，其中未知函数 $f(s)\in L^p$. 由解所在的范围，他引出 L^p 的对偶空间 L^q，且二者之间存在如下关系：

$$\left|\int_a^b g(s)f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\left(\int_a^b|g(s)|^q\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b|f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}},\quad g(s)\in L^q,f(s)\in L^p.$$

里斯给出解 $f(s)$ 存在且

$$\left(\int_a^b|f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant M$$

的充要条件是：存在 $M>0$，对任意常数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，有

$$\left|\sum_{n=1}^m a_n c_n\right|\leqslant M\left(\int_a^b\left|\sum_{n=1}^m a_n g_n(s)\right|^q\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}.$$

对于 l^p，里斯考虑无穷线性方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}x_k=c_i\,,\quad i=1,2,\cdots$$

的求解问题，其中未知量 $\{x_k\}\in l^p$. 由解所在的范围，里斯引出 l^p 的对偶空间 l^q，且二者之间存在如下关系：

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\{a_k\}\in l^q,\{x_k\}\in l^p.\qquad(4\text{-}1\text{-}1)$$

里斯给出解 $\{x_k\}$ 存在且

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant M$$

的充要条件是：存在 $M>0$，对任意常数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{m}a_n c_n\right|\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\alpha_{nk}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4-1-2}$$

里斯给出这两个问题解存在充分条件的证明思路都是：先考虑有限个方程的情形，然后利用其发展的弱收敛定理过渡到无限情形．我们以 l^p 空间为例来说明里斯处理有限个方程情形的过程．

设

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}x_k=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4-1-3}$$

且 $\{\alpha_{ik}\}_{k=1}^{\infty}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是线性无关的．令

$$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_{ik}\right|^q,$$

$$C(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i c_i\right|^q,$$

则不等式条件（4-1-2）即为

$$C(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant M^q A(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

然后里斯考虑函数 $C(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在条件 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$ 下的极值解问题．最后里斯指出，由极大值点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 所定义的

$$x_k^{(n)}=\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_{ik}\right|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_{ik}\right)\sum_{i=1}^{n}a_i c_i,\quad k=1,2,\cdots$$

即为方程组（4-1-3）的解，且

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant M.$$

尽管 l^q 作为空间可以独立定义，并且从施密特开始，就认识到利用

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}，\ \left\{x_k\right\}\in l^p$$

和

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}，\ \left\{a_k\right\}\in l^q$$

可以建立 l^p 和 l^q 中的度量，但黑利认识到了在里斯问题中 l^q 对 l^p 的依赖性，且

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\sup_{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k\right|.$$

同时黑利也认识到了里斯的工作与闵可夫斯基凸体理论之间的联系.

闵可夫斯基用几何方法对连分数理论和 n 维空间的凸性理论进行研究. 他的凸体理论表明，若对每个 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 定义距离函数 $D(x)$，则 $\{x\in\mathbf{R}^n,D(x)<1\}$ 是一个凸域. 设 $y\in\mathbf{R}^n$，$D(y)\geqslant M$，记

$$\langle u,x\rangle=\sum_{k=1}^{n}u_k x_k .$$

若 y 满足线性方程

$$\langle u,x\rangle=\sum_{k=1}^{n}u_k x_k=1，$$

即 $\sum_{k=1}^{n}u_k y_k=1$，则对所有满足该线性方程的解 x，都有 $D(x)\geqslant M$.

黑利的关键之处在于认识到不等式（4-1-1）和条件（4-1-2）的本质，这两个不等式实质上是关于可数无穷维空间中满足“三角公理”的距离函数的不等式条件，并观察到与闵可夫斯基“凸体理论”之间的关联. 因此黑利的目标是，将几何结构引入一般情形积分方程的求解理论. 在 1921 年的文章中，黑利在数列空间上定义了距离函数，在有限维空间“凸体理论”的基础上发展出无限维（数列）空间上的凸体理论，并依此将里斯所考虑的 l^p 空间上的问题推广到一般的数列空间上，赋予了对偶空间的几何结构，标志着对偶空间理论抽象化的开始.

4.1.2 序列赋范线性空间及其对偶空间思想

黑利的独到之处在于认识到了里斯具体问题的本质．首先，存在一个由数列构成的可以在其上定义度量的空间，不妨记为 X ，$D(x)$ 表示 X 上的距离函数，是正实数，且满足：

Ⅰ. 若 $x \in X$ ，则对任意 $\lambda \in \boldsymbol{C}$（$\boldsymbol{C}$ 是复数域），$\lambda x \in X$ ，且 $D(\lambda x) = |\lambda| D(x)$ ；

Ⅱ. 若 $x, y \in X$ ，则 $D(x+y) \leqslant D(x) + D(y)$ ；

Ⅲ. 若 $D(x) = 0$ ，则 $x = 0$.

这实际上就是现代序列赋范线性空间的定义．其次，存在一个与 X 相对应的空间，并在其上定义“极距离函数（见图 4.2）”.

Seien jetzt $u_1, u_2, \ldots u_n$ irgend n reelle Zahlen, so bezeichnen wir mit

$$\Delta(u) = \Delta(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

das Maximum der Summe (u, x) mit der Nebenbedingung $D(x) = 1$. Dieses Maximum existiert wegen der Stetigkeit von (u, x) auf der abgeschlossenen Punktmenge $D(x) = 1$. Mit Hilfe der eben eingeführten Bezeichnungsweise schreiben wir

$$\Delta(u) = \overline{|(u, x)|}_{D(x)=1}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die Funktion $\Delta(u)$ ebenfalls den Bedingungen I bis III genügt, die für die Funktion $D(x)$ gelten. Wenn wir $D(x)$ als konvexe Abstandsfunktion im Bereiche der x bezeichnen, so ist $\Delta(u)$ eine konvexe Abstandsfunktion im Bereiche der u, welche die zu $D(x)$ polare Abstandsfunktion genannt werden soll.

图 4.2　黑利的定义

由空间 X 定义作用

$$\langle u, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \text{，} \quad x \in X \tag{4-1-4}$$

由级数收敛且

$$\sup_{D(x)=1} |\langle u, x \rangle| < \infty$$

确定 u 所在的空间，不妨记为 Y ，并定义 Y 上的“凸距离函数”

$$\Delta(u) = \sup_{D(x)=1} |\langle u, x \rangle| \text{，}$$

黑利称 $\Delta(u)$ 为 $D(x)$ 的“极距离函数”（polare Abstandsfunction）.

$\Delta(u)$ 不一定满足上面距离函数的条件Ⅲ，即由 $\Delta(u)=0$ 无法确定 u 是否满足 $u=0$．黑利指出，若 $\Delta(u)=0$，则对任意 $x\in X$，有

$$\langle u,x\rangle=0,$$

即由这样的 u 确定的方程 $\langle u,x\rangle=c$ 只有当 $c=0$ 时才有解且解为 X 中的任意向量．因此不妨设 $\Delta(u)=0$，则 $u=0$．

由 $\Delta(u)$ 的定义，得到不等式（4-1-1）的推广不等式

$$\left|\langle u,x\rangle\right|\leqslant\Delta(u)D(x).$$

里斯在 l^p 空间上考虑的问题就转化为方程组

$$\left\langle a^{(v)},x\right\rangle=c_v,\quad v=1,2,\cdots \tag{4-1-5}$$

的解存在的充要条件，其中未知量 $x\in X$ 且 $D(x)\leqslant M$．

相应地，里斯在 l^p 上给出的解存在的充要条件（4-1-2）转化为：存在 $M>0$，则对任意常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v\right|\leqslant M\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}\right). \tag{4-1-6}$$

此时，黑利面对的问题是：式（4-1-6）是方程组（4-1-5）的解存在的充要条件吗？

为此，他首先做了一些准备工作.

该文第一节引入 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 上的“凸体定理”.

对每个 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，定义距离函数 $D(x)$，则

$$\left\{x\in\mathbf{R}^n,D(x)<1\right\}$$

是一个凸域（即其任意两个元的凸组合还在其中）．由闵可夫斯基的理论得到如下结论.

【定理 4.1】 设 $y\in\mathbf{R}^n$，$D(y)\geqslant M$，记

$$\langle u,x\rangle=\sum_{k=1}^{n}u_k x_k .$$

若 y 满足线性方程

$$\langle u,x\rangle=\sum_{k=1}^{n}u_k x_k=1,$$

即 $\sum_{k=1}^{n}u_k y_k=1$，则对所有满足该线性方程的解 x，都有 $D(x)\geqslant M$.

定义 $(\mathbf{R}^n,D)$ 所对应的空间为 $(\mathbf{R}^n,\Delta)$，其中

$$\Delta(u)=\max_{D(x)=1}\left|\langle u,x\rangle\right|,\quad u\in\mathbf{R}^n,$$

则定理 4.1 又可表述为：

方程 $\langle u,x\rangle=1$ 与 $\left\{x\in\mathbf{R}^n,D(x)<1\right\}$ 相交、相切（支撑）或不相交，当且仅当 $\Delta(u)>1$， $\Delta(u)=1$ 或 $\Delta(u)<1$.

该文第二节将第一节的理论完全推广到了 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 上.

第三节将前两节的理论推广到了由数列构成的可数复空间 $\mathbf{R}_w$ 上．如前所述，引入度量空间 X 及与其对应的空间 Y，得到较弱的结论：

若 $M\Delta(u)>c$ 或 $M\Delta(u)<c$，则方程 $\langle u,x\rangle=c$ 与 $D(x)\leqslant M$ 相交或者不相交. 并指出当 $M\Delta(u)=c$ 时，得不到确切的结论.

有了以上的准备工作，黑利就开始解决上面提到的问题.

在第四节，黑利举出重要反例说明条件（4-1-6）并不是充分的．令

$$X=\left\{x\in\mathbf{R}_w,D(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|\right\},$$

由此确定了

$$Y=\left\{u\in\mathbf{R}_w,\Delta(u)=\sup_k\left|u_k\right|\right\}.$$

考虑方程组

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+\cdots&=1\\ x_2+x_3+\cdots&=1\\ x_3+\cdots&=1\\ &\vdots\end{aligned}$$

令 $M=1$，由 Δ 的定义，该方程组满足不等式条件（4-1-6），

$$\left|\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\right|\leqslant\Delta(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\cdots,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\cdots).$$

但该方程组无解．因为由第一个方程减去第二个方程得 $x_1=0$，同理得 $x_k=0$，

$k=2,3,\cdots$，显然它们不是该方程组的解，结果矛盾．

实际上，该例中的 X 即为现在熟悉的 l^1，而 Y 即为现在熟悉的 l^∞．产生以上矛盾的原因实质上是，l^∞ 的对偶空间不是 l^1，这就涉及空间的自反性问题．

那么，在存在此反例的情况下，黑利又是如何解决上述问题的呢？

在这一节，对于上面的 X 和 Y，黑利又举例说明适当放大常数 M，无解的方程又可以有解．

在第五节，黑利充分运用有限维及其发展的无限维空间上的凸体理论，解决了有限方程组的情形．

对于方程组

$$\left\langle a^{(v)},x\right\rangle=c_v,\quad v=1,2,\cdots,n \tag{4-1-7}$$

不失一般性，设 $\left\{a^{(v)},v=1,2,\cdots,n\right\}$ 是线性无关的，且存在常数 $M>0$，对任意常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v\right|\leqslant M\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}\right). \tag{4-1-8}$$

定义 $f:X\to\mathbf{C}^n$，

$$x\mapsto\left(\left\langle a^{(1)},x\right\rangle,\left\langle a^{(2)},x\right\rangle,\cdots,\left\langle a^{(n)},x\right\rangle\right),$$

容易验证 f 是从 X 到 $\mathbf{C}^n$ 上的满射．这表明对于方程组（4-1-7）来说，其解必定存在．

那么是否存在解 x，$D(x)\leqslant M$？

自然的想法是，将所有的解放在一起，看 $\inf\limits_{f(x)=c}D(x)$ 是否能小于等于 M．由此，黑利在 $\mathbf{C}^n$ 上定义量 T，

$$T(\xi)=\inf_{f(x)=\xi}D(x),\quad \xi\in\mathbf{C}^n,$$

经验证，T 是 $\mathbf{C}^n$ 上的度量函数．

由条件（4-1-8），对任意 $\varepsilon>0$，

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v\right|<(M+\varepsilon)\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}\right),$$

由第四节的结论，存在 y，$D(y)<M+\varepsilon$，使得

$$\left\langle \sum_{v=1}^{n} \lambda_v a^{(v)}, y \right\rangle = \sum_{v=1}^{n} \lambda_v c_v ,$$

令

$$\left\langle a^{(v)}, y \right\rangle = \eta_v, v = 1, 2, \cdots, n , \quad \eta = \left(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \right) ,$$

则

$$f(y) = \eta .$$

因此有

$$T(\eta) \leqslant D(y) < M + \varepsilon ,$$

且

$$\sum_{v=1}^{n} \lambda_v \eta_v = \sum_{v=1}^{n} \lambda_v c_v ,$$

即$T(\eta) < M + \varepsilon$，且$\eta$满足线性方程

$$\sum_{v=1}^{n} \lambda_v x_v = \sum_{v=1}^{n} \lambda_v c_v .$$

因为T是$\mathbf{C}^n$上的度量函数，由$\mathbf{C}^n$上平行于第一节中的定理，满足该线性方程的解x都满足$T(x) < M + \varepsilon$. 因此有

$$T(c) < M + \varepsilon .$$

由ε的任意性，$T(c) \leqslant M$.

因此对任意M_1，$M_1 > M$，由T的定义，存在x，$f(x) = c$且$D(x) \leqslant M_1$. 由此得到如下结论.

【定理 4.2】对于方程组

$$\left\langle a^{(v)}, x \right\rangle = c_v , \quad v = 1, 2, \cdots, n ,$$

若存在常数$M > 0$，对任意常数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，有

$$\left| \sum_{v=1}^{n} \lambda_v c_v \right| \leqslant M \Delta \left(\sum_{v=1}^{n} \lambda_v a^{(v)} \right) ,$$

则对任意M_1，$M_1 > M$，该方程组存在解x且$D(x) \leqslant M_1$.

在l^p上，里斯利用l^p上的弱收敛定理（对角化方法）从有限线性方程组的解

过渡得到无穷线性方程组的解.

在第五节，黑利提出对任意 n，都存在解 x，且 $D(x)\leqslant M_1$， $M_1>M$. 那么黑利是如何从有限过渡到无限的呢？

在第六节，黑利称：到了解决方程组（4-1-5）在条件（4-1-6）下解存在问题的时候了.

显然，黑利认识到了里斯工作中连续线性泛函存在性的重要性. 他指出，若存在 Y 上的泛函 L，满足

Ⅰ. $L(\lambda u)=\lambda L(u), L(u'+u'')=L(u')+L(u'')$；

Ⅱ. $|L(u)|\leqslant M_1\Delta(u)$；

Ⅲ. $L(a^{(v)})=c_v$，

并进一步存在 p， $D(p)\leqslant M_1$，有

$$L(u)=\langle u,p\rangle,$$

则 $x=p$ 即为方程组（4-1-5）的解.

同时黑利也指出，条件Ⅱ可推出 L 是 Y 上的连续泛函. 由此将求解方程组问题转化为相应空间上连续线性泛函存在性及其表示的问题，这一思想在泛函分析史上具有里程碑意义.

为了构造出符合条件的连续线性泛函 L，黑利进一步加强条件：Y 中存在可数稠密子集 $p^{(1)},p^{(2)},\cdots$.

取一列数

$$\left\{M^{(r)}\right\},\quad M<M^{(1)}<M^{(2)}<\cdots<M_1.$$

黑利利用归纳法证明了对任意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$， $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$，存在 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$，满足

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v\gamma_v\right|\leqslant M^{(m)}\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}+\sum_{v=1}^{m}\mu_v p^{(v)}\right).\tag{4-1-9}$$

该证明过程非常巧妙，这里给予详细叙述.

当 $m=0$ 时，即为条件（4-1-6）. 设式（4-1-9）对一般 m 成立. 对于 $m+1$，不妨设 $\mu_{m+1}=1$，即要证明对任意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$， $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$，存在 γ_{m+1}，成立

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v\gamma_v+\gamma_{m+1}\right|\leqslant M^{(m+1)}\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}+\sum_{v=1}^{m}\mu_v p^{(v)}+p^{(m+1)}\right).\tag{4-1-10}$$

对于固定的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$， $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$，式（4-1-10）可视为复平面上以

$$\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v\gamma_v$$

为圆心，以

$$M^{(m+1)}\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}+\sum_{v=1}^{m}\mu_v p^{(v)}+p^{(m+1)}\right)$$

为半径的闭圆盘，这是一个凸体．因此存在γ_{m+1}使式（4-1-10）成立，表明所有这些凸体相交．

这时黑利再次应用凸体中的结论，只需证明任意 3 个这样的凸体相交即可．

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^{(h)}c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v^{(h)}\gamma_v+\gamma_{m+1}\right|\leqslant M^{(m+1)}\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^{(h)}a^{(v)}+\sum_{v=1}^{m}\mu_v^{(h)}p^{(v)}+p^{(m+1)}\right),\ h=1,2,3.$$

令

$$\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^{(h)}c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v^{(h)}\gamma_v=d_h\,,$$

$$\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^{(h)}a^{(v)}+\sum_{v=1}^{m}\mu_v^{(h)}p^{(v)}=q^{(h)}\,,\quad h=1,2,3\,.$$

由式（4-1-9），对任意k_1,k_2,k_3有

$$\left|k_1d_1+k_2d_2+k_3d_3\right|\leqslant M^{(m)}\Delta\left(k_1q^{(1)}+k_2q^{(2)}+k_3q^{(3)}\right).$$

由第五节的结论，有限个方程

$$\left\langle q^{(h)},x\right\rangle=d_h\,,\quad h=1,2,3$$

存在解x，且$D(x)\leqslant M^{(m+1)}$ ．

令$\gamma_{m+1}=\left\langle p^{(m+1)},x\right\rangle$，则

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^{(h)}c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v^{(h)}\gamma_v+\gamma_{m+1}\right|\\&=\left|d_h+\gamma_{m+1}\right|=\left|\left\langle q^{(h)}+p^{(m+1)},x\right\rangle\right|\\&\leqslant D(x)\Delta(q^{(h)}+p^{(m+1)})\end{aligned}$$

$$\leqslant M^{(m+1)}\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v^{(h)}a^{(v)}+\sum_{v=1}^{n}\mu_v^{(h)}p^{(v)}+p^{(m+1)}\right),\quad h=1,2,3.$$

式（4-1-9）得证．特别地有

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v+\sum_{v=1}^{m}\mu_v\gamma_v\right|\leqslant M_1\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}+\sum_{v=1}^{n}\mu_v p^{(v)}\right). \tag{4-1-11}$$

令

$$L(p^{(v)})=\gamma_v,$$

由式（4-1-11），L 可线性扩张为 X 上的有界线性泛函，且满足条件Ⅲ．

在第七节，黑利指出，一般 $L(u)$ 并不能表示为 $\langle u,q\rangle$ 的形式，但是在 Y 存在可数稠密子集的条件下，他证明了 $L(u)$ 可表示为 $\lim\limits_{v\to\infty}\left\langle u,q^{(v)}\right\rangle$ 的形式．

结合第六节和第七节，黑利实际上得到了下面的结论．

【定理 4.3】 (X,D) 和 (Y,Δ) 如前所述，且 Y 存在可数稠密子集，则存在 Y 上的连续线性泛函 L 使得

$$L(a^{(v)})=c_v$$

的充要条件是：存在 $M>0$，对任意常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\lambda_v c_v\right|\leqslant M\Delta\left(\sum_{v=1}^{n}\lambda_v a^{(v)}\right),$$

且存在序列 $\left\{q^{(v)}\right\}$ 使得

$$L(u)=\lim_{v\to\infty}\left\langle u,q^{(v)}\right\rangle.$$

另外，对任意 $M_1>M$，可使 $|L(u)|\leqslant M_1\Delta(u)$．

在该文中，黑利已经给出了现代序列赋范线性空间的定义，但其所定义的与之对应的空间还不是现代意义上的对偶空间．在该文中，黑利实际上也考虑了与序列赋范空间相对应空间上连续线性泛函由“原空间”中向量表示的问题．从形式上看，黑利的工作为里斯的工作披上了抽象化的外衣，其“原空间”与所对应空间显然分别对应空间 l^p 与 l^q，l^p 与 l^q 自然的对偶性使得黑利“对偶空间”的定义有些先入为主．

但从本质上来看，黑利将凸体理论引入赋范线性空间，为对偶空间理论在

局部凸空间上的进一步推广奠定了思路；首次明确地将方程组求解问题转化为相应空间上连续线性泛函的存在性以及表示问题，为对偶空间从具体到抽象跨出了实质性的一步．在从有限过渡到无限的过程中，黑利的构造方法非常巧妙，虽然他限制在可分空间上进行延拓，但这种向前延拓一步，逐步延拓的方法正是其后汉恩-巴拿赫泛函延拓定理证明中所采用的方法．

4.2 汉恩的对偶空间工作

汉恩（见图 4.3）1879 年出生于奥地利的维也纳，1898 年在维也纳大学开始学习法律，1899 年转向学习数学，并在斯特拉斯堡大学、慕尼黑大学和哥廷根大学学习．1902 年获得博士学位，1905 年提交任职论文后取得维也纳大学的讲师资格，1909 年因其在数学方面的非凡成就被提名为切尔诺夫茨能力出众的教授．第一次世界大战服兵役期间受伤后，于 1916 年来到波恩大学，他再次成为能力出众的教授，1917 年成为波恩大学的正教授，并于 1921 年以正教授身份回到维也纳大学，直至 1934 年去世．

图 4.3　汉恩

1921 年在德国耶拿举行的一次数学学会会议上，汉恩汇报了他关于任何函数表示为奇异积分极限的工作，德国数学家舒尔（Issai Schur，1875—1941 年）向他指出了奇异积分与无穷序列线性变换之间的关系．1922 年汉恩由此出发建立了抽象对偶空间的雏形．

汉恩共发表了四篇泛函分析方面的论文，其中与对偶空间理论相关的是 1922 年的“关于线性运算”①和 1927 年的“关于线性空间中的线性方程组”②两篇文章，他关于对偶空间理论的主要贡献是从拓扑学意义上定义了对偶空间，并给出与之相关的一些结论，奥地利籍美国数学家门格尔（Karl Menger，1902—1985 年）认为汉恩也是泛函分析的先驱．公理化并不是汉恩的主要目标，他的目的是用一般

① Hahn H. Über Folgen linearer operationen [J]. Monatshefte für Mathematik, 1922, 32(1): 3-88.

② Hahn H. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen [J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1927, 157: 214-229.

性的理论来统一处理泛函方面的问题．在前人工作基础上，他深邃地认识到了希尔伯特积分方程代数化的本质，在此推动下建立了自己的一套抽象理论．

4.2.1　对黑利工作的进一步发展

3.3 节详细分析了促使里斯产生 L^p 和 l^p 上对偶思想的本质原因，即积分方程（2-1-1）求解过程中产生的积分方程组（3-3-2）和无穷线性方程组（3-3-12）的求解问题．

黑利抓住了 l^p 空间上的这一本质特征，给出了一般数列赋范线性空间的定义及其“对偶空间”的刻画．但汉恩走得更远，他看到了函数空间与数列空间在同一问题上的相似性，其目标是在黑利的基础上，对黑利的工作进一步发展．在“关于线性运算”一文中，汉恩将黑利的思想进一步明确和推广，建立了包括数列空间与函数空间在内的一般赋范线性空间及其对偶空间的概念．

在 1922 年的文章中，汉恩首先将数列空间与函数空间隐含的自有线性抽象化，给出线性空间的定义．与黑利在数列空间上定义距离函数一样，汉恩在线性空间中定义相同的量．

设 A 是线性空间，对任意 $a \in A$ 都指定数 $D(a)$，具有以下性质：

Ⅰ．$D(a) \geqslant 0$，$D(a) = 0$ 当且仅当 $a = 0$；

Ⅱ．$D(\lambda a) = |\lambda| D(a)$；

Ⅲ．$D(a + a') \leqslant D(a) + D(a')$．

有别于黑利直接将 $D(a)$ 称为“凸距离函数”的不确切表达，汉恩指出，由函数 $D(a)$ 可定义 A 中的距离 r，从而使其成为一个度量空间．即

$$r(a, a') = D(a - a'),$$

由此可以在 A 中定义极限并得到 $D(a)$ 是 A 上的连续函数．

与黑利对赋范线性空间的定义止步于此不同，汉恩进一步定义了 A 中的柯西列以及完备性，并指出该文中所讨论的空间 A 都是完备的．这表明汉恩认识到了完备的重要性．

接下来，汉恩给出了关于“极空间”的定义（见图 4.4）．

Nun führen wir im Raume $\mathfrak{C}$ eine Maßfunktion $\Delta(c)$ ein durch die Definition [5]): bei gegebenem c sei $\Delta(c)$ die obere Schranke von $|U(a,c)|$ für alle der Bedingung $D(a)=1$ genügenden a von $\mathfrak{A}$. Da $U(-a,c)=-U(a,c)$ und $D(-a)=D(a)$, sieht man daß in dieser Definition auch $|U(a,c)|$ durch $U(a,c)$ ersetzt werden kann. Wir nennen $\Delta(c)$ die (bezüglich der Fundamentaloperation U zu $D(a)$ polare Maßfunktion.

Es kann auch $\Delta(c)=+\infty$ ausfallen. Wir wollen annehmen, dies sei nicht für alle c von $\mathfrak{C}$ der Fall und lassen sodann aus $\mathfrak{C}$ alle Punkte mit unendlichem $\Delta(c)$ weg. Die übrigbleibenden Punkte von $\mathfrak{C}$ bezeichnen wir mit b, die Menge aller dieser Punkte mit $\mathfrak{B}$ und nennen sie einen (bezüglich der Fundamentaloperation U) zu $\mathfrak{A}$ polaren Raum.

图 4.4　汉恩 1922 年关于“极空间”的定义

这是数学史上第一次明确提出的有关“对偶空间”的名称，但汉恩的定义本质上是对黑利定义的抽象化．与黑利一样，汉恩定义的“极空间”也来自一个事先给定的空间，这个空间中的每个元 c 与 A 中的每个元 a，赋予实数 $U(a,c)$ 且关于 a 是线性的．然后对每个 c 定义量 $\Delta(c)$，汉恩称其为此空间上的“距离函数”（Maßfunktion），即现在的范数，

$$\Delta(c)=\sup_{D(a)=1}\left|U(a,c)\right|,$$

去掉所有 $\Delta(c)=\infty$．记

$$B=\left\{c\,\middle|\,\Delta(c)<\infty\right\},$$

称 B 为 A 的“极空间”，并由此得到

$$\left|U(a,b)\right|\leqslant D(a)\cdot\Delta(b),$$

称 $U(a,b)$ 是“基本运算”（Fundamental operation）．由此证明了对每个 $b\in B$，$U(a,b)$ 实际上是空间 A 上的连续线性泛函．

在文中，汉恩也提到这一思想来自黑利，其“基本运算” $U(a,b)$ 正是式（4-1-4）的抽象化．

在给出以上基本概念之后，汉恩的主要工作是讨论连续泛函列的极限问题，他得到四个主要结论：

Ⅰ．对每个 $a\in A$，$U(a,b_n)$ $(b_n\in B, n=1,2,\cdots)$ 都是有界的当且仅当 $\Delta(b_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 一致有界．

Ⅱ．对每个 $a\in A$，$\lim\limits_{n\to\infty}U(a,b_n)$ 存在，则 $V(a)=\lim\limits_{n\to\infty}U(a,b_n)$ 也是 A 上的连续

线性泛函.

Ⅲ. 对每个 $a\in A$，$U(a,b_n)$ $(b_n\in B, n=1,2,\cdots)$ 都是有界的，则 $\lim\limits_{n\to\infty}U(a,b_n)$ 存在当且仅当对于 A 中稠密子集 $\mathcal{G}$ 中的每个 g，$\lim\limits_{n\to\infty}U(g,b_n)$ 存在.

Ⅳ. 对每个 $a\in A$，$\lim\limits_{n\to\infty}U(a,b_n)$ 存在，$F(a)$ 是 A 上的连续线性泛函，则

$$F(a)=\lim_{n\to\infty}U(a,b_n)$$

对每个 $a\in A$ 成立，当且仅当对 A 中稠密子集 $\mathcal{G}$ 中的每个 g 成立.

前两个结论分别是一致有界性原理与弱收敛定理的雏形.

正如汉恩在该文引言部分提到的：

“我的目的是建立一般理论，使得奇异积分方程和舒尔的研究是这套理论的特殊情形.[①]”

由此可见其目的是发展一套一般理论，以包含奇异积分与序列空间中的相关理论. 因此，该文余下部分是其发展的四个主要结论在大量数列空间与函数空间中的具体应用，以体现其理论的一般性. 这些具体的例子也为我们提供了丰富的赋范线性空间与其“极空间”的模型. 这里概而述之.

该文的第一类例子是通过基本运算

$$U(a,b)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k v_k$$

引入的数列空间与其“极空间”. 包括以下例子：

1. $A=l^\infty$，$B=l^1$.
2. $A=c$（收敛数列空间），$B=l^1$.
3. $A=c_0$（极限为 0 的数列空间），$B=l^1$.
4. A 是有界变差数列空间，B 是对应级数收敛的数列空间.
5. A 是极限为 0 的有界变差数列空间，B 是对应级数部分和有界的数列空间.
6. $A=l^1$，$B=l^\infty$.
7. $A=l^p(p>1)$，$B=l^q$.
8. A 是对应级数收敛的数列空间，B 是有界变差数列空间.

① Hahn H. Über Folgen linearer operationen [J]. Monatshefte für Mathematik, 1922, 32(1): 3-88.

9. A 是对应级数部分和有界的数列空间，B 是极限为 0 的有界变差数列空间.

在将结论 IV 应用于例 2 和例 4 时他意识到，在这些空间中可能还存在除 $U(a,b)$ 外的其他连续线性泛函.

例 4 和例 8 表明汉恩有了两个空间互为对偶的思想，例 1 和例 6 也有这种对偶的思想.

例 5 和例 9 也有对偶的思想，而且汉恩也表明，作为连续线性泛函的范数与其作为空间中向量的范数相同.

第二类例子是通过基本运算

$$U(a,b)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

引入的函数空间及其“极空间”：

10. $A=L^1[a,b]$， $B=L^\infty[a,b]$.

11. $A=L^p[a,b](p>1)$， $B=L^q[a,b]$.

12. $A=L^\infty[a,b]$， $B=L^1[a,b]$.

最后一类是由不同类型积分定义的积分运算引入的函数空间及其“极空间”. 如例 17，$A=C[\alpha,\beta]$，B 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上左连续的有界变差函数，其基本运算为

$$U(a,b)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}\phi(x).$$

从全文来看，汉恩思想的局限性与黑利一样，在于定义了赋范线性空间（或巴拿赫空间）A 之后，并不从 A 上的有界线性泛函或连续线性泛函的角度出发考虑，而考虑满足基本运算

$$u(a,b)<+\infty$$

成立的 b 所构成的空间，即其所称的“极空间”. 然而他们研究的“极空间”中有些只是对偶空间的一部分，并不是全部，如 L^1 的对偶空间是 L^∞， L^∞ 的对偶空间却不是 L^1. 这种局限性反映了他们的抽象化工作来自具体的问题背景，他们所考虑的基本运算对应的正是具体问题中的方程形式.

但该文给出了完整的赋范线性空间定义、连续线性泛函范数的定义，囊括了同时代已知的大部分函数空间和数列空间及其“极空间”，以便说明其理论的普适

性，其抽象统一性更为明显．

4.2.2　对里斯求解积分方程过程的抽象

在 1927 年“关于线性空间中的线性方程组”一文中，汉恩提出了如下问题：

设 A 为完备赋范线性空间，其元记为 x．设

$$\left\{f_y(x): y \in Y\right\}$$

是 A 上的连续线性泛函子集，$\left\{c_y: y \in Y\right\}$ 是相应的实数子集，其中 Y 是指标集．设线性方程组

$$f_y(x) = c_y$$

在 A 中有解 x．若 $\left\{v_y: y \in Y\right\}$ 是 A 上的连续线性泛函子集，则 $\left\{v_y: y \in Y\right\}$ 满足什么条件，扰动方程组

$$f_y(x) + v_y(x) = c_y$$

也存在解？

汉恩并没有给出这一抽象问题的具体应用，而且在历史的发展中，他的这一理论并没有得到广泛应用．但我们不禁要问：这一抽象问题的具体来源是什么？

实际上，对积分方程（2-1-1）

$$\varphi(s) + \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(s)$$

的左右两边用其所在空间上的连续线性泛函 F_y（$y \in Y$，这里 Y 可视为该空间上连续线性泛函集所对应的指标集）作用，得到方程组

$$F_y(\varphi(s)) + F_y\left(\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) = F_y(f(s))\text{，}\quad y \in Y\ .$$

显然，

$$F_y\left(\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

也可视为 φ 的一个泛函，记为 G_y．因为 f 是已知函数，记 $c_y = F_y(f(s))$．这样上式又可以写为

$$F_y(\varphi(s)) + G_y(\varphi(s)) = c_y\text{，}\quad y \in Y$$

将上式中的 φ 用一般赋范线性空间中的元 x 来代替，积分方程（2-1-1）转换为一

般赋范线性空间上的方程组

$$F_y(x)+G_y(x)=c_y, \quad y\in Y, \tag{4-2-1}$$

其中 $x\in A$ 是未知量，$\{F_y\},\{G_y\}$ 是 A 上的连续线性泛函集.

从上面的分析过程中看到 G_y 是依赖于 F_y 的，所以汉恩将方程组（4-2-1）视为方程组

$$F_y(x)=c_y, \quad y\in Y \tag{4-2-2}$$

的扰动方程. 而方程组（4-2-2）则是里斯在 $L^p[a,b]$ 上引入的问题在一般赋范线性空间 A 中的抽象. 因此有理由说汉恩的抽象问题还是来自弗雷德霍姆第二型积分方程的求解问题，而其抽象化的过程正是希尔伯特的代数化过程.

然而，方程组（4-2-2）在一般赋范线性空间上有意义的前提是，其上存在非平凡的连续线性泛函，由此汉恩考虑的首要问题就是连续线性泛函的存在性问题，此即为汉恩–巴拿赫泛函延拓定理的雏形. 这相当于里斯在考虑 L^p 上问题时引入 L^q 的原因.

4.2.3　汉恩的抽象对偶空间理论

汉恩对里斯关于积分方程（2-1-1）求解过程的抽象化产生了本质的问题，即连续线性泛函的存在性问题.

黑利的工作证明了满足一定条件的连续线性泛函是存在的. 尽管黑利和汉恩都给出了赋范线性空间及其“极空间”的定义，但他们研究的“极空间”是建立在基础不等式或“基本运算”基础之上的，只是连续线性泛函的一部分.

现在，汉恩要将积分方程的求解抽象到一般赋范线性空间上，首要解决的问题是赋范线性空间上连续线性泛函的存在性问题.

在 1927 年发表的这一文章中，汉恩解决了以上问题.

在其 1922 年工作的基础上，汉恩首先给出了完备赋范线性空间 A 的定义，依旧采用符号 $D(x)$ 来表示 A 中元 x 的范数. 并指出，对于任何一个完备的子空间 A_0，按照包含关系存在包含 A_0 的良序子空间链，其最大元是 A. 这一结论为其主要定理证明中的超有限归纳奠定了基础.

接着汉恩给出了 A 上有界线性泛函的定义：

Ⅰ. $f(\lambda x)=\lambda f(x)$，

Ⅱ. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，

Ⅲ. $|f(x)|\leqslant MD(x)$，M 是一常数.

由此得到

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant MD(x_1-x_2)\text{，}$$

从而说明 f 是一致连续的，并依旧采用符号 $\Delta(u)$ 来表示 $u=f(x)$ 的范数.

黑利实际上证明了在一个可数集上满足一定条件的连续线性泛函的存在性问题，汉恩再次将黑利的思想一般化，将可数集替换为任意子集，连续线性泛函的存在性问题转化为子集上连续线性泛函的延拓问题．他首先证明了一个子集上有界线性泛函延拓到该子集生成的闭子空间上的充要条件.

【定理 4.4】 设 E 是线性空间 A 的任意子集，A_0 是由 E 生成的 A 的子空间．若 $f_0(x)$ 是定义在 E 上的泛函，则存在定义在 A_0 上线性泛函 $f(x)$ 是 $f_0(x)$ 的延拓的充要条件为，对 E 中元素的任意有限线性组合 $\sum\limits_{p=1}^{n}\lambda_p x_p$，满足不等式

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\lambda_p f_0(x_p)\right|\leqslant D\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p x_p\right).$$

在此基础上汉恩给出了后来称之为汉恩-巴拿赫泛函延拓定理的结论.

【定理 4.5】 设 A_0 是 A 的闭线性子空间，f_0 是定义在 A_0 上的线性泛函，范数为 M．则在 A 上存在线性泛函 f，其范数为 M，且为 f_0 的延拓.

该定理的证明过程仍是现在国内大学《泛函分析》教材中通用的方法，关键是将子空间上的连续线性泛函延拓到高一维的子空间上，然后利用超有限归纳法延拓到全空间上.

随后汉恩给出了这一定理的两个推论：

Ⅰ. 设 A_0 是赋范线性空间 A 中的子集，则对于 A_0 上给定的泛函 $f_0(x)$ 可延拓为 A 上范数不大于 M 的线性泛函 $f(x)$ 的充分必要条件是：对于 A_0 中点的任意有限线性组合满足定理 4.4 中的不等式.

Ⅱ. 对于 A 中的点 $a\,(\neq 0)$，有范数为 1 的线性泛函，其在点 a 处的值为 $D(a)$.

其中推论Ⅱ保证了前面提到的方程组之间转化的等价性.

在解决了连续线性泛函存在性的问题之后，在之前“极空间”的基础之上建

立所有连续线性泛函构成的空间就水到渠成．汉恩在数学史上第一次给出了对偶空间（见图 4.5）的确切定义，但汉恩依旧将之称为“极空间”．

§ 2.

Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{S}$ aller Linearformen $u = f(x)$ im Raume $\mathfrak{R}$. Speziell sei $u = 0$ die identisch verschwindende Linearform. Verstehen wir unter $\Delta(u)$ die Steigung der Linearform $u = f(x)$, so hat $\Delta(u)$ offenbar folgende Eigenschaften:

1. Es ist $\Delta(u) \geqq 0$, und zwar $\Delta(u) = 0$ dann und nur dann, wenn $u = 0$.
2. $\Delta(\lambda u) = |\lambda| \Delta(u)$.
3. $\Delta(u_1 + u_2) \leqq \Delta(u_1) + \Delta(u_2)$.

Durch $\Delta(u)$ ist also eine konvexe Maßbestimmung im Raume $\mathfrak{S}$ gegeben. Jeder Punkt u von $\mathfrak{S}$ bedeutet eine Linearform von x in $\mathfrak{R}$. Bezeichnen wir den Wert der Linearform u im Punkte x mit $B(u, x)$, so gilt die Ungleichung:

图 4.5　汉恩 1927 年关于“极空间”的定义

若用 B 来表示 A 上的连续线性泛函全体，$u=0$ 表示零泛函，$\Delta(u)$ 表示 u 的范数，则 $\Delta(u)$ 满足下列条件：

Ⅰ．$\Delta(u)\geqslant 0$，$\Delta(u)=0$ 当且仅当 $u=0$，

Ⅱ．$\Delta(\lambda u)=|\lambda|\Delta(u)$，

Ⅲ．$\Delta(u_1+u_2)\leqslant\Delta(u_1)+\Delta(u_2)$．

由此汉恩说明 B 是赋范线性空间．同时汉恩进一步证明了 B 的完备性．

通过利用记号

$$B(u,x)=u(x),$$

汉恩指出对每个 $x\in A$，又可以定义 B 上的连续线性泛函，且其范数正是 x 的范数 $D(x)$．

这些关于连续线性泛函的结论将 A 和 B 之间的对偶性表露无遗．

解决了泛函的存在性问题后，汉恩进一步将方程组（4-2-2）转换为

$$\hat{x}(F_y)=c_y,\quad y\in Y \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

这实际上是利用二次对偶进行转化，将 x 视为 A 的对偶空间上的连续线性泛函，按现在的通用记号记为 $\hat{x}$．也就是将寻找解 $x\in A$ 的问题转换为 A 的对偶空间 B 上连续线性泛函的存在性问题，这可以由其得到的泛函延拓定理解决，因为汉恩证明了 A 的对偶空间 B 也是一个完备赋范线性空间．但泛函延拓定理只是保证了在一定条件下存在 B 上的连续线性泛函 φ，使得

$$\varphi(F_y)=c_y,\ \ y\in Y,\tag{4-2-4}$$

但最终寻找的解在空间 A 中.

因此，汉恩又面临另一个问题：这样的 φ 是否能利用 A 中的元进行表示？也就是说，是否存在 $x\in A$，使得

$$\varphi(F_y)=\hat{x}\left(F_y\right).$$

该问题的解决又涉及空间的自反性问题. 但汉恩和黑利在他们的工作中都发现了存在赋范线性空间不满足自反性，即 $L^1[a,b]$. 所以为了得到一般赋范线性空间上问题的解，汉恩限制了 A 的范围，要求 A 是正则的，即自反的.

在正则赋范线性空间上解决了方程组（4-2-2）后，汉恩回到其初衷，在正则赋范线性空间上解决积分方程（2-1-1）所对应的方程组（4-2-1）. 这个问题的解决过程非常烦琐，其中可以看到他借用了希尔伯特和里斯关于紧算子的思想，要求方程组（4-2-2）是方程组（4-2-1）的一个紧扰动，但其思想远没有里斯将积分方程（2-1-1）视为算子方程，通过发展算子谱理论给出方程解的思想影响深远，这也许是他的这一工作没有得到广泛认可的根本原因.

4.3　巴拿赫的对偶空间工作

巴拿赫（见图 4.6）1892 年生于克拉科夫，1945 年因肺癌于利沃夫去世. 巴拿赫幼时清贫，由养母及其朋友抚养，他们对于巴拿赫早期在数学方面的洞察力给予了积极鼓励. 10 岁时进入一所以研究人类学为主的学校，但年幼的巴拿赫对数学情有独钟，常在课余时间与好友一起探讨数学问题. 1910 年，巴拿赫来到利沃夫工学院求学. 第一次世界大战期间，巴拿赫因为左撇子和视力不佳，未服兵役. 在此期间，他参加了雅盖隆大学的一些讲座. 1916 年，对巴拿赫而言是很关键的一年，当他和尼柯迪姆（Otto Marcin Nikodym，1887—1974 年）在一个种植园谈论勒贝格积分问题时，遇到了当时著名的数学家斯坦豪斯. 自此，他们开始了长期的合作，并且和尼科迪姆及其他几位波兰数学家建立了波兰数学协会. 在斯坦豪斯的支持下，巴拿

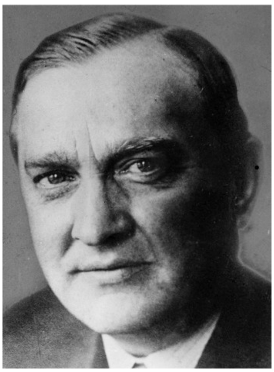

图 4.6　巴拿赫

赫大学未毕业就获得了博士学位，也是通过斯坦豪斯，巴拿赫认识了自己的妻子．年轻有为且富有号召力的巴拿赫建立了利沃夫数学学派，1929 年创建了以刊发泛函分析领域主要成果的期刊*Studia Mathematica*．因其在泛函分析方面的杰出成就，巴拿赫被认为是 20 世纪最重要、最有影响力的数学家之一．

4.3.1 动机与目标

巴拿赫在对偶空间理论方面的贡献是给出了对偶空间和对偶算子的一般理论．正如他在其博士论文“关于抽象集合上的运算及其在积分方程上的应用”中所言：

“这本书所要达到的目标是建立一些定理，它们对于定义在各种集合上的泛函都是有效的，这些定理我会在以后（的章节）详细说明．然而，为了避免对每个定义域进行单独的证明，这将是非常痛苦的，我采取了一种不同的方法．也就是说，在一般情况下，我考虑这样的元素集，我假定它们具有某些性质，并由此推导出一些定理，然后我证明所选用的假定对于每个特定的定义域是成立的．[①]”

由此可见，巴拿赫的目标是给出一般性理论．然而，与黑利和汉恩赋范线性空间及对偶空间的抽象思想同时产生不同，巴拿赫首先在其 1922 年的博士论文中，阐述和建立了后来称之为巴拿赫空间及其上有界线性算子的理论，但该文中并没有涉及连续线性泛函的理论．直到 1929 年“关于线性泛函”[②③]的两篇文章和 1932 年《线性算子理论》[④]一书中，巴拿赫才建立了完善的对偶空间理论与对偶算子理论．无论是巴拿赫空间理论的建立还是对偶空间理论的建立，巴拿赫都以空间上算子理论的研究为主要目的，空间理论是其建立算子理论的基础．

巴拿赫的工作以抽象统一性著称，但从其 1922 年的博士论文及 1932 年的专著中所列举的丰富例证不难看出，这些抽象理论的背后还是具体的函数空间或数

① Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals [J]. Fund. Math, 1922, 3(1): 133-181.

② Banach S. Sur les fonctionnelles linéairesI [J]. Studia Mathematica, 1929, 1(1): 211-216.

③ Banach S. Sur les fonctionnelles linéaires II [J]. Studia Mathematica, 1929, 1(1): 223-239.

④ Banach S. Théorie des opérations linéaires [M]. Warsaw, 1932.

列空间以及这些空间上相应的积分方程或线性方程组问题.

4.3.2　赋范线性空间理论的建立

1922 年，巴拿赫在《数学基础》第 3 卷中发表了其博士论文，该论文一经发表就引发了数学界的轰动，甚至人们有时把它作为泛函分析学科形成的标志之一. 经 Google 学术搜索发现，到目前为止该文的引用量高达近三千次，并且不断增长，由此可见该文对泛函分析乃至整个数学学科发展的影响. 在该文中，巴拿赫建立了完善的赋范线性空间理论. 他的这篇文章表达简洁，结构清晰，可作为教科书的典范.

尽管与汉恩的文章“关于线性运算”几乎同步发表，但与汉恩从对偶思想同时引入完备赋范线性空间及其“极空间”（对偶空间的雏形）的出发点不同，在该文的“引言”中，巴拿赫首先提到“泛函算子”（Functional operation）或“线函数”（Line function）的定义域（Domain）和值域（Against-domain）是由函数构成的集合.

他还介绍了泛函的一些定义域：连续函数集；勒贝格平方可积函数集；有界可测函数集等.

由此可以看到，巴拿赫的出发点更关注“泛函算子”，目的是对定义在不同集合上的泛函算子进行统一处理，因此需要先对不同的定义域统一抽象化. 该文的结构安排也体现了他的这一思想. 全文加附录共四部分，第一部分、第二部分是其抽象理论部分，第三部分与附录是其前两部分抽象理论的应用或者说是其抽象理论建立的问题背景.

第一部分第一节给出了完备赋范（实）线性空间的公理定义.

设 E 为至少包含两个元素的集合，分别用 $X,Y,Z,\cdots$ 和 $a,b,c,\cdots$ 来表示 E 中的元和实数. 在 E 上定义两种运算：

I. E 中元的加法，$X+Y,X+Z,\cdots$，E 中元与实数的乘法，$aX,bY,\cdots$，且满足下面的性质：

I_1　$X+Y$ 是 E 中的元；

I_2　$X+Y=Y+X$；

I_3　$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$；

I_4 $X+Y=X+Z$，则$Y=Z$；

I_5 E中存在元θ，使得$X+\theta=X$；

I_6 $a\cdot X$是E中的元；

I_7 $a\cdot X=0$，则或者$X=\theta$，或者$a=0$；

I_8 $a\neq 0$且$a\cdot X=a\cdot Y$，则$X=Y$；

I_9 $X\neq\theta$且$a\cdot X=b\cdot X$，则$a=b$；

I_{10} $a\cdot(X+Y)=a\cdot X+a\cdot Y$；

I_{11} $(a+b)\cdot X=a\cdot X+b\cdot Y$；

I_{12} $1\cdot X=X$；

I_{13} $a\cdot(b\cdot X)=(a\cdot b)\cdot X$.

且定义(1) $-X=(-1)\cdot X$，(2) $X-Y=X+(-1)\cdot Y$.

假设

II. 在E上定义一种称为范数的运算（记为$\|X\|$），其取值为实数且满足下面的条件：

II_1 $\|X\|\geqslant 0$；

II_2 $\|X\|=0$等价于$X=\theta$；

II_3 $\|a\cdot X\|=|a|\cdot\|X\|$；

II_4 $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$.

III. 设(1) $\{X_n\}$是E中的序列；(2) $\lim\limits_{\substack{r=\infty\\ p=\infty}}\|X_r-X_p\|=0$，则存在元$X$使得

$$\lim_{n=\infty}\|X-X_n\|=0.$$

从巴拿赫给出完备赋范线性空间的原始定义来看，其关于线性空间的定义比较烦琐，而关于范数及完备性的定义与现代定义完全一致，并且巴拿赫已用符号$\|\ \|$来表示范数．在此基础上，他又给出了点列极限和向量级数收敛的定义．

在第二节，巴拿赫讨论了范数和极限的基本性质，如极限的唯一性、点列收敛的柯西准则等．在第三节，主要给出了完备赋范线性空间上关于重要点集的定义与定理．巴拿赫从完备赋范线性空间E中以点X_1为中心、以r为半径的球体$K(X_1,r)$定义出发，讨论了球体与球体的位置关系（包含、相等），得到类似于直线上闭区间套定理的球体套定理，给出了聚点、导集、闭集、完全集、稠密的定

义，得到一类闭集的交还是闭集以及闭集的补集是开集（注意，巴拿赫并没有给出开集的定义，该结论是说一个闭集外的任意一点，都存在该点的一个球体与该闭集相交为空）等结论.

第一部分前三节构成了巴拿赫整个完备赋范线性空间的空间理论基础. 在第四节，巴拿赫回到其前言所指出的初衷：对泛函算子进行统一研究. 类似于实数集上函数极限的归结原则，给出了两个（完备）赋范线性空间（巴拿赫强调这两个赋范线性空间不一定相同）上算子在子集中一点处连续的定义，指出这样的定义与 $\varepsilon - r$ 球体定义等价，并给出了算子在一点处连续的局部有界性. 然后巴拿赫又给出了子集上定义的算子列收敛于一个算子的定义.

【定义】 设定义在集合 A 上的算子列 $\{F_n(X)\}$ 按照范数收敛于 A 上的算子 $F(X)$，若对 A 中的任意 X，有

$$\lim_{n=\infty} F_n(X) = F(X).$$

注意到巴拿赫在第四节只给出了连续算子的定义及性质，此时的算子还没有线性性质.

在第二部分的第一节，巴拿赫写道：

“在算子类中特别值得关注的是被称为可加的算子，在本章我们将讨论定义在整个（完备赋范线性空间）E 上的可加算子.”

巴拿赫给出了可加算子的定义，并指出由可加性可得到这样的算子对于有理数保持线性. 然后他得到了可加算子有界和连续的重要结论.

【定理 4.6】 可加算子 $F(X)$ 在一个球体 K 上有界，则在 E 中的每一点处都连续.

结合第一章中的引理 9[①]，巴拿赫得到了可加算子的若干重要性质.

性质 1：在一点处连续的可加算子 $F(X)$ 在每一点都连续.

性质 2：$F(X)$ 是可加连续算子，a 是任意实数，则有 $F(aX) = aF(X)$.

性质 3：若 $F(X)$ 是可加连续算子，则存在 $M > 0$，对每个 X 有 $\|F(X)\| \leqslant M\|X\|$.

性质 4：如果(1) $\{F_n(X)\}$ 是一列连续可加算子；(2) $F(X)$ 是可加算子；(3) $\lim\limits_{n=\infty} F_n(X) = F(X)$，那么(1) $F(X)$ 是连续的；(2)存在常数 $M > 0$，对每个 n 和 X，

① 若对于集合 A 中的点 X_0，$F(X)$ 是连续函数，则在 A 中存在一个球 $K(X_0, r)$，$F(X)$ 在其上有界.

$\|F_n(X)\| \leqslant M\|X\|$.

性质 2 表明巴拿赫所言的可加连续算子即为连续线性算子；性质 3 说明可加连续算子一定有界，而性质 4 则是现代一致有界性原理的雏形.

第二节继续对连续算子进行讨论，给出了一个非常重要的结论.

【定理 4.7】 如果(1) $U(x)$ 是 E 上的连续算子；(2)存在数 $0<M<1$ 使得对任意 X' 和 X'' 有

$$\|U(X')-U(X'')\| \leqslant M\|X'-X''\|,$$

那么存在 X 使得

$$U(X)=X.$$

此即为巴拿赫不动点定理．该定理的证明采用迭代的思想方法，这一思想方法可追溯至冯·诺依曼在势理论中的工作.

随后由定理 4.7 给出下面的定理，该定理表明了巴拿赫的出发点：在一定条件下解决算子方程解的存在性问题.

【定理 4.8】 $\boldsymbol{X}+\alpha F(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}$ 是一个关于已知向量 $\boldsymbol{Y}$ 和未知向量 $\boldsymbol{X}$ 的方程，其中：

Ⅰ. $F(\boldsymbol{X})$ 是定义在 E 上且值域包含在 E 中的可加连续算子；

Ⅱ. M 是满足不等式 $\|F(\boldsymbol{X})\| \leqslant M\|\boldsymbol{X}\|$ 的最小数；

Ⅲ. α 是任意实数.

则对所有 $\boldsymbol{Y}$ 以及满足关系 $|h\cdot M|<1$ 的数 h，该方程存在解，且其具有形式

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n h^n F^{(n)}(\boldsymbol{Y}),$$

其中 $F^{(n)}(\boldsymbol{Y})$ 是通过关系 $F^{(1)}(\boldsymbol{Y})=F(\boldsymbol{Y})$，$F^{(n)}(\boldsymbol{Y})=F\left(F^{(n-1)}(\boldsymbol{Y})\right)$ 确定的.

结合里斯在 L^p 中的弗雷德霍姆积分方程理论，从这个定理不难看出方程的形式正是弗雷德霍姆积分方程的抽象形式．由此可以说巴拿赫最终的归宿或出发点还是解决弗雷德霍姆积分方程．该文第三部分及附录部分更清晰地表明了巴拿赫建立抽象算子论的这一思想.

在第三部分，巴拿赫指出，其所考虑的完备赋范线性空间 E 是定义在 $[a,b]$ 上满足一定条件的单变量可测函数集．在这样的前提下，得到如下结论.

【定理 4.9】 若(1) $K(s,t)$ 是定义在 $[a,b]\times[a,b]$ 上的可测函数；(2)对任意

$X(t)\in E$，数值 $\int_a^b K(s,t)X(t)\mathrm{d}t$ 不存在的这些 $s\in[a,b]$ 是勒贝格零测集；(3)对任意 $X(t)\in E$，$Y(s)=\int_a^b K(s,t)X(t)\,\mathrm{d}\,t\in E_1$（$E_1$ 是和 E 一样满足一定条件的完备赋范线性空间），则存在 $M>0$，使得

$$\left\|\int_a^b K(s,t)X(t)\,\mathrm{d}\,t\right\|\leqslant M\cdot\|X(t)\|.$$

在附录部分，巴拿赫又证明了对于其前言提到的那些函数空间都是满足条件Ⅰ～Ⅲ的完备赋范线性空间，定理 4.9 则表明这些空间上的积分算子

$$\int_a^b K(s,t)X(t)\,\mathrm{d}\,t$$

是有界线性算子．因此这些空间上的弗雷德霍姆积分方程（2-1-1）都能统一为定理 4.8 中的算子方程形式，也就是说，巴拿赫最终给出了这些空间上所对应的弗雷德霍姆方程解存在的（一个充分）条件及解的形式．

4.3.3　对偶空间理论的建立

从巴拿赫 1922 年的博士论文中不难看到弗雷德霍姆、里斯等人的算子理论对他思想的影响．在 L^p 上的弗雷德霍姆积分方程工作中，里斯引入了对偶算子，与原算子相结合研究方程的求解问题．里斯对偶算子的引入是建立在 L^p 空间上连续线性泛函的表示工作基础之上的，黑利、汉恩的工作已经将里斯的这一对偶思想完全抽象化．但黑利的工作仅应用于方程组（4-1-7）的求解问题，这只是解决弗雷德霍姆积分方程的一个关键步骤，还没有完全解决弗雷德霍姆积分方程的求解问题．汉恩比黑利走得要远，但汉恩没有完全吸收里斯的算子思想，汉恩建立了抽象的对偶空间理论，但并没有算子的思想，弗雷德霍姆积分方程被抽象化为一个泛函方程，而不是算子方程，这也降低了其工作的影响程度．

几乎还是与汉恩同步，1929 年巴拿赫在同一杂志上发表了两篇题为“关于线性泛函”的文章，与其 1922 年文章的出发点一样，以建立对偶算子理论为主，由此首先建立了对偶算子理论的基础——对偶空间理论．

他的第一篇文章主要侧重线性泛函的存在性与表示问题，因此他首先给出了赋范线性空间上连续线性泛函的明确定义．

设 E 是一个标准的向量集（即赋范线性空间）．$x,y,z,\cdots$ 表示 E 中的元素，

$a,b,c,\cdots$，$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示实数．

一个集合 $G(\subset E)$ 称为是线性的，如果它包含其任意两个元素 x_1, x_2 的任意线性组合 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$．定义 G 上的（泛）函数 $f(x)$，G 中的每个元 x 都对应一个实数 $\xi = f(x)$．称 $f(x)$ 是线性的，如果（注意，巴拿赫定义的线性就是现在的连续线性）：

Ⅰ．它是可加的，即对所有的 $x_1, x_2 \in G$，

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)\text{；}$$

Ⅱ．它是连续的，即若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$x_n \in G$，$x \in G$，则总有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

很容易验证存在常数 $M > 0$，使得对所有的 $x \in G$，

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|.$$

其中最小的数 M 称为 $f(x)$ 在 G 上的范数，即为 $\|f\|_G$．若 $G = E$，则简单地记为 $\|f\|$．因此有

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_G \|x\|,\ x \in G.$$

巴拿赫在该文的第一节就给出了泛函延拓定理．

首先是一维延拓定理．

【定理 4.10】设 G 是一个线性子集（空间），y_0 是 E 中不属于 G 的元．记 G' 为所有形如

$$x + \alpha y_0\text{（}x \in G\text{，}\alpha\text{ 是实的）}$$

的元构成的．显然 G' 是线性的且包含 G．设 $f(x)$ 是定义在 G 上的线性泛函，则存在定义在 G' 上的线性泛函 $\varphi(x)$，满足：

Ⅰ．$\varphi(x) = f(x),\ x \in G$；

Ⅱ．$\|\varphi\|_{G'} = \|f\|_G$．

在此基础上，通过超有限归纳得到一般的延拓定理．

【定理 4.11】设 G 是一个线性子集（空间），$f(x)$ 是定义在 G 上的线性泛函．则存在定义在 E 上的线性泛函 $\varphi(x)$，满足

$$\varphi(x) = f(x),\ x \in G\text{，}$$

$$\|\varphi\| = \|f\|_G .$$

由延拓定理，得到里斯、黑利、汉恩所讨论问题的更一般化的形式.

【定理 4.12】 设 $\{x_n\}$ 是 E 中的一列元，$\{c_n\}$ 是一列数，M 是一个正数．则存在泛函 $f(x)$ 满足

$$f(x_n) = c_n \text{ 和 } \|f\| \leqslant M$$

的充要条件是，对任何有限实数列 $\{\lambda_i\}$，不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i\right\|$$

成立.

与汉恩有所不同，巴拿赫更关心泛函的存在性问题与泛函的表示问题，并没有对连续线性泛函空间做过多讨论.

在第二篇文章中，巴拿赫考虑泛函的表示问题，即在什么情况下，一个连续线性泛函可由原空间中的一个元来表示，这与黑利、汉恩的工作一脉相承．但与黑利、汉恩通过对空间自反性的要求达到表示的结论不同，巴拿赫首先又对线性泛函引入了附加条件的一种范数.

设 $\{\sigma_n\}(\sigma_1 = 1)$ 是单调递增趋于无穷大的正数列，$\{a_n\}$ 是（E 中的）一列元且 $\|a_n\| \leqslant 1$（$n = 1, 2, \cdots$），$f(x)$ 是（E 上的）一个线性泛函，以下 $\|f\|^*$ 指的是最小的正数 K 使得

$$|f(a_n)| \leqslant K\sigma_n ,\quad n = 1, 2, \cdots ,$$

则称 $\|f\|^*$ 是 f 在序列 $\{\sigma_n\},\{a_n\}$ 上的范数.

在这样的条件下，巴拿赫得到泛函的表示结论.

设 L 是线性泛函构成的线性集合．若对 L 中每个泛函都对应一个数 $A(f)$，且满足

$$A(f_1 + f_2) = A(f_1) + A(f_2) ,$$

$$|A(f)| \leqslant M\|f\|^* ,$$

式中 M 是一个正的常数，则存在元 x_0 使得

$$\|x_0\| \leqslant M ,\quad A(f) = f(x_0) ,\quad f \in L .$$

在第二部分的第二节，巴拿赫又给出了更一般的泛函延拓定理.

【定理 4.13】 $p(x)$ 是一个泛函，满足关系(1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；(2) $p(\lambda x)=\lambda p(x)$，$\lambda\geqslant 0$，则存在可加泛函（注意，这里的可加指的是只有线性而没有连续性）$f(x)$ 满足不等式

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x),\quad x\in E.$$

之后，巴拿赫讨论了连续线性泛函的弱收敛问题.

从第四节开始，巴拿赫开始建立对偶算子理论.

令 E，E' 是两个完备的赋范向量空间．设 E 中的每个元 x 对应 E' 中的一个元 y，$y=U(x)$，那么我们称 $U(x)$ 是定义在 E 上的一个算子．一个算子 $U(x)$ 是

Ⅰ. 可加的，即 $U(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha U(x_1)+\beta U(x_2)$；

Ⅱ. 连续的，即 $\lim\limits_{n\to\infty}U(x_n)=U(x)$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，

则称其为线性的.

很容易验证存在数 $M>0$ 使得

$$\|U(x)\|\leqslant M\|x\|.$$

反之，一个满足这样的不等式的可加算子是连续的.

分别用 X 和 Y 来表示 E 和 E' 上的线性泛函．一个算子 $U(x)$ 将定义在 E' 上的任何线性泛函 Y 对应定义在 E 上的线性泛函 $X=Y\left[U(x)\right]$，这也是线性的．实际上，显然它是可加的，也是连续的，因为

$$\left|Y\left[U(x)\right]\right|\leqslant\|Y\|\cdot\|U(x)\|\leqslant M\|Y\|\cdot\|x\|.$$

这种 X 和 Y 之间的对应是一个新的线性算子

$$X=\overline{U}(Y),$$

其定义域是线性泛函 Y，值域是包含在线性泛函 X 中的子集．实际上，由前面的不等式有

$$\left\|\overline{U}(Y)\right\|\leqslant M\|Y\|,$$

我们称之为算子 $y=U(x)$ 的对偶（伴随）算子.

最后，巴拿赫利用对偶算子的可逆性及算子的可逆性，分别给出了算子方程和对偶算子方程解的结论，归结到其建立连续线性泛函与对偶算子理论的初衷.

【定理 4.14】(1)如果算子 $X=\overline{U}(Y)$ 的逆存在且是连续的，那么方程 $y=U(x)$ 对任何 y 都是可解的．(2)若方程 $X=\overline{U}(Y)$ 对任何 X 都是可解的，则

(a) $U(x)$ 的逆存在且是连续的，

(b) $U(x)$ 的值域是所有满足条件若 $\overline{U}(Y)=0$，$Y(y)=0$ 的 y．

【定理 4.15】(1)若线性算子 $y=U(x)$ 的逆存在且是连续的，则方程 $X=\overline{U}(Y)$ 对任意 X 都是可解的．(2)若方程 $y=U(x)$ 对任意 y 都是可解的，则

(a)对偶算子 $X=\overline{U}(Y)$ 的逆存在且是连续的，

(b) $\overline{U}(Y)$ 的值域是集合 X 满足条件当 $U(x)=0$ 时 $X(x)=0$ 的 x．

在该文中，巴拿赫虽未明确提出“对偶空间”的名称，但他明确给出了“线性泛函构成的集合是线性的”这一说明（见图 4.7）。

p. 211—216. Cette communication

¹) Un ensemble L de fonctionnelles linéaires est dit *linéaire* lorsqu'il contient toute combinaison linéaire à coefficients réels de deux quelconques de ses fonctionnelles.

图 4.7　巴拿赫关于线性泛函集合的定义

此外，在对偶算子的定义中，关于对偶算子的线性及有界性显然利用了连续线性泛函全体构成赋范线性空间这一事实，而所有这一切都以其给出的泛函延拓定理为基础，该定理保证了泛函的充分性．

1932 年，巴拿赫出版了专著《线性算子理论》，对线性算子理论的已有成果进行了全面的整理和补充．

在前言中，巴拿赫写道：

“算子理论，由沃尔泰拉创立，以研究定义在无限维空间上的函数为目标．该理论在本质上已经深入到数学中若干高度重要的领域：回想一下作为一般算子理论主要领域中的积分方程与变分法理论这些特殊情形就足够了①．”

在该书第四章“赋范空间”中，巴拿赫首先给出了赋范（线性）空间的定义，然后给出了完备性的定义，也就是说，此时赋范（线性）空间的定义脱离了完备性的要求．巴拿赫称完备的赋范线性空间为“espace du type（B）”，即 B 型空间或巴拿赫空间或 B-空间．第二节重新表达了泛函延拓定理及其相关重要结

① Banach S. Theorie des Operations Lineaires [M]. Warsaw, 1932.

论．在第四节中，巴拿赫给出了 $C[0,1]$，$L^r(r\geqslant 1)$，c（收敛数列空间），$l^r(r\geqslant 1)$ 等空间上连续线性泛函的表示定理及其证明，既表明了其抽象理论的具体问题来源，又囊括了同时代所知的连续线性泛函表示结论．

4.4 复赋范线性空间的对偶空间

对偶空间是一个空间上连续线性泛函构成的空间，即对偶空间的元素为连续线性泛函．因此连续线性泛函的表示是对偶空间理论的核心问题，也是目前泛函分析的重要议题之一．汉恩-巴拿赫泛函延拓定理保证了连续线性泛函的存在性．

巴拿赫的《线性算子理论》一书确立了泛函分析学科的建立，代表了当时泛函分析领域的最高成就．早在 1921 年，黑利就引入了复（序列）赋范线性空间的概念，但巴拿赫的巴拿赫空间与其上的对偶空间理论还是实的空间理论，即作为线性空间，数乘运算中的数所取范围为实数，这与积分方程的问题背景是实值函数相关，因而汉恩-巴拿赫的泛函延拓定理是实连续线性泛函的延拓定理．

20 世纪 40 年代前后，人们开始重视复线性空间理论，乐维希（Von Heinrich Löwig）、里斯等人最先提出复希尔伯特空间的概念．乐维希在 1934 年发表的“有限或无限维的复欧几里得空间”[①]一文中，给出了复线性空间上复线性泛函的分解形式：

$$L(x)=R(x)-\mathrm{i}\,R(\mathrm{i}\,x),$$

式中，$R(x)$ 是 $L(x)$ 的实部，i 是虚根单位．这样一个复线性泛函就分解为两个实线性泛函的线性组合．

1938 年，美国数学家波恩布鲁斯特（Henri Frederic Bohnenblust，1906—2000 年）和索伯兹科（Andrew Sobzcyk，1915—1981 年）也提出了相似的思想，在他们的一篇短文“复线性空间上线性泛函的延拓”[②]中，给出了复赋范线性空间上的

① Löwig H. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl [J]. Acta Szeged, 1934, 7: 1-33.

② Bohnenblust H F, Sobczyk A. Extensions of functionals on complex linear spaces [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1938, 44(2): 91-93.

泛函延拓定理.

设 l 是复赋范线性空间 L 的任一复子空间，$f(x)$ 是定义在 l 上的范数为 M 的复线性泛函，则总存在定义在 L 上的复线性泛函 F，使得在 l 上与 $f(x)$ 相同，且在 L 上的范数也是 M.

这个定理的证明通过 $f(x)$ 的分解

$$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}\,f_2(x)$$

实现，其中 $f_2(x)=-f_1(\mathrm{i}\,x)$，由实线性泛函 f_1 在 L 上的延拓 F_1 得到 f 在 L 上延拓泛函 F，其中

$$F(x)=F_1(x)-\mathrm{i}\,F_1(\mathrm{i}\,x).$$

4.5　小结

1921 年黑利在序列赋范线性空间研究无穷线性方程组求解问题时，虽然没有明确提出“极空间”一词，但是首次引入了序列赋范线性空间上满足一定条件的连续线性泛函构成的空间，此即为抽象对偶空间的雏形. 他于 1921 年发表的这篇论文的主要贡献是：结合“凸体理论”引入了序列赋范线性空间，这类空间包含所有的 l^p 空间；通过基本运算引入了泛函构成的空间，并给出了该空间中范数的定义，发现了空间的自反性与不自反性. 这些都标志着对偶空间抽象化理论的开始，是汉恩-巴拿赫泛函延拓定理得以形成的基础. 因此，不难理解数学家和数学史家对这篇论文的高度评价“泛函分析史上的一个里程碑”①②.

汉恩和巴拿赫对黑利的思想进一步抽象，考虑的都是一般赋范线性空间上连续线性泛函的延拓问题，这些思想分别建立在他们于 1927 年和 1929 年提出的赋范线性空间理论的基础上，并都采用黑利的技巧证明了之后称为汉恩-巴拿赫泛函延拓定理的结论，即将问题转化为增加一个向量的延拓问题，与黑利采用的普通归纳法不同，二人采用的都是超有限归纳法. 更为重要的是，他们的工作已明确体现了连续线性泛函的空间整体结构. 不同之处是，汉恩从泛函角度出发将赋范

① Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1981.

② Forgáč L. On the Hahn-Banach theorem [J]. Mathematica Slovaca, 1976, 26(1): 39-45.

线性空间上的方程问题转换为该空间上泛函的方程问题，巴拿赫上升到算子高度，将方程问题转化为算子和对偶算子问题.

对偶空间理论的形成历史是泛函分析学科建立历史的一个缩影.与巴拿赫《线性算子理论》一书同年发表的，在泛函分析史上占有重要地位的还有冯・诺依曼的《量子力学的数学基础》[①]一书和斯通（Marshall Harvey Stone，1903—1989 年）的《希尔伯特空间上的线性变换及其在分析中的应用》[②]一书，斯通的书呈现了希尔伯特空间上对称线性算子的谱理论，展示了泛函分析在经典分析若干重要领域中的应用，而冯・诺依曼的书主要关注量子力学，开辟了泛函分析在数学物理新领域中的应用. 巴拿赫的书是沃尔泰拉、阿达玛、弗雷歇和里斯等人开创的工作经过几十年持续发展达到的高峰，可以说在一定意义上实现了他们研究的初衷，其理论的一般性、广泛性及自成一体性使得泛函分析成为一个广泛而又独立的研究领域. 这三本书有力地体现了泛函分析的广度和深度，所有这些都标志着泛函分析学科的正式建立.

① Neumann J. Mathematische grundlagen der quantenmechanik [M]. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1932.

② Stone M H. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis [M]. American Mathematical Soc., 1932.

第 5 章　对偶空间理论的发展

巴拿赫专注于泛函分析的研究，以完善的公理结构体系建立了赋范线性空间理论及其上的算子理论、对偶空间理论，为后续泛函分析的进一步发展提供了强大的动力．当抽象的对偶空间理论形成之后，由于公理化方法的继续运用，这些理论与当时的拓扑学、测度论等理论相结合，形成了一系列新的概念和方法，建立了一系列新的联系并产生了一系列深远的结果．这部分内容主要介绍不可分希尔伯特空间、测度论下具体赋范线性空间的对偶空间、拓扑学推动下对偶空间理论的发展，以及对偶思想对 20 世纪数学发展的影响．

5.1　具体赋范线性空间上对偶空间的发展

5.1.1　不可分希尔伯特空间的对偶空间

1. 不可分希尔伯特空间的引入

施密特于 1908 年引入几何结构建立了 l^2 的空间理论，里斯–费舍尔定理表明 L^2 与 l^2 同构，但是直到 1927 年才由匈牙利裔美籍数学家、物理学家、计算机科学家冯 • 诺依曼在其“量子力学的数学基础”①一文中建立了希尔伯特空间理论的公理化体系：

Ⅰ．H 是一个线性空间；

Ⅱ．H 中存在内积，该内积定义了一个距离；

Ⅲ. 在距离 $|f-g|$ 意义下 H 是可分的，即可数子集在 H 中几乎处处稠密；

Ⅳ．H 有任意多（无穷多）线性独立的元素；

① Neumann J. Mathematische Begründung der Quantenmechanik [J]. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl, 1927: 1-57.

Ⅴ．H 是完备的，也就是说，若 H 中序列 $f_1, f_2, \cdots$ 满足柯西收敛条件（对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon)$，使得对任意 $m, n \geqslant N$，有 $|f_m - f_n| \leqslant \varepsilon$），则该序列收敛，即存在 $f \in H$，使得对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$|f_n - f| \leqslant \varepsilon .$$

冯·诺依曼也于 1932 年出版了关于希尔伯特空间的第一部专著，然而其定义的希尔伯特空间是无限维的和可分的．他在希尔伯特空间中对内积的定义是 $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$，这与施密特关于复 l^2 空间中相应内积的定义稍有不同，而这一性质保证了 $\langle x, x\rangle$ 的非负性．

里斯于 1930 年也给出了复希尔伯特空间的定义①：

Ⅰ．H 是线性的；

Ⅱ．每一对元 f, g，其内积 (f, g) 对应一个特定的实数或复数；

Ⅲ．H 是完备的；

Ⅳ．H 是可分的，即存在可数的几乎处处稠密的子集；

Ⅴ．H 包含任意数量线性独立的元素．

因为数学自身和量子物理发展的需要，希尔伯特空间在 20 世纪 30 年代得到了广泛关注和研究，在此方面著述丰富，如美国数学家斯通关于“希尔伯特空间的线性变换”②③的一系列论文和著作《希尔伯特空间的线性变换及其在分析中的应用》④等．斯通的这部著作与同年代出版的巴拿赫的《线性算子理论》有同样深远的影响力，也是在这个时期数学家们逐渐认识到可分性的不必要性．

最先研究不可分希尔伯特空间的是德国数学家乐维希，他和里斯、雷利希

① Riesz F. Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged 5 (1930–1932), 23-54, Oeuvres complètes II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 1103-1134.

② Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space. I. Geometrical aspects [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1929, 15(3): 198.

③ Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space: III. Operational methods and group theory [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1930, 16(2): 172.

④ Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis [M]. American Mathematical Soc., 1932.

（Franz Rellich，1906—1955 年）在 1934 年指出，对于绝大部分理论，可分性（即存在可数稠密子集）是没有必要的，因而可分性的条件可以去掉．正如弗里德里希·席勒安大学数学研究所教授皮特施所言：

“抽象不可分希尔伯特空间上的表示定理直到乐维希和里斯才给出．[①]”

1934 年，乐维希在 *Acta Litterarum ac Scientiarum* 杂志发表了一篇 33 页的论文“有限或无限维的复欧几里得空间”，同年 9 月举行的德国数学学会会议上他提交了该论文，并被收录在德国数学学会的年度报告中．他也因此文于 1935 年获得了德国大学科技学院的讲师资格，可以说这篇文章是他在泛函分析方面的最大成就，其思想持续影响了后续泛函分析的发展．这篇文章后来被众多著名数学家引用，如法国数学家约当（Pasqual Jordan，1902—1980 年）和美籍匈牙利数学家冯·诺依曼[②]、美国数学家莫里（Francis Joseph Murray，1911—1996 年）[③]、伦吉尔（Béla Adalbert Lengyel，1910—2002 年）和斯通[④]、菲利普斯（Ralph Saul Phillips，1913—1998 年）[⑤]、卡尔金（John William Calkin）[⑥]等数学家都引用过．乐维希在文章前言部分就表明了自己的出发点：

“这篇论文将要证明，许多以前证明过的、对（可分）希尔伯特空间成立的命题，对任意欧几里得空间也是成立的，也就是线性距离空间，其中由内积定义了距离，或者——换句话说——他们以前证明时所用的可分性的条件现在变得不那么重要了．[⑦]”

由此可见，乐维希的动机是要证明可分希尔伯特空间成立的一些命题在任意完备内积空间仍然成立．也就是说，可分性通常被视为希尔伯特空间定义的一部分，现在却变得微不足道了．

---

① Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators [M]. Springer Science & Business Media, 2007: 31.

② Jordan P, Neumann J. On inner products in linear, metric spaces [J]. Annals of Mathematics, 1935: 719-723.

③ Murray F. J, Neumann J. On rings of operators [J]. Annals of Mathematics, 1936: 116-229.

④ Lengyel B. A, Stone M H. Elementary proof of the spectral theorem [J]. Annals of Mathematics, 1936: 853-864.

⑤ Phillips R. S. A characterization of Euclidean spaces [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1940, 46(12): 930-933.

⑥ Calkin J. W. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space [J]. Annals of Mathematics, 1941: 839-873.

⑦ Löwig H. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl [J]. Acta Szeged, 1934, 7: 1-33.

论文的第一部分做了一些有关一般赋范线性距离空间的准备工作．他首先回忆了复线性空间和范数的定义，这促使其定义了复赋范线性空间，并称之为“复线性距离空间”（komplexer linearer metrischer Raum）．在第二部分，他给出了广义内积的定义（厄米特双线性泛函），指出在内积正定的条件下，可导出范数，从而具有正定内积的线性空间也是一个赋范线性空间，并指出 n 维复欧几里得空间与里斯所给出的复希尔伯特空间是其所给空间的特殊情形．

在第三部分，乐维希引入了完备复欧几里得空间，即一般意义上的希尔伯特空间．

【定义 1】 设 R 是由定义在 N（正整数集）上的复值函数 φ 构成的空间，其中 φ 在 N 上至多可数个点上不为零且对 N 中任意序列 $\{u_n \mid \varphi(u_n) \neq 0\}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi(u_n)\right|^2$$

收敛，对任意的

$$\tau = \varphi(u)\text{，}\quad \lambda = \psi(u) \in R$$

定义内积

$$\langle \tau, \lambda \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\psi(u_n)\text{，}$$

式中当 $u \neq u_n$ 时，$\varphi(u) = 0$ 且 $\psi(u) = 0$．

利用良序集[①]理论，乐维希证明了完备复欧几里得空间极大规范正交系 $\{e_i\}_{i\in I}$（I 是指标集）的存在性，并指出同一希尔伯特空间的任意极大规范正交系具有相同的基数．更进一步，他定义了复欧几里得空间的维数，通过维数建立了两个复欧几里得空间之间的同构，并得到了诸多与可分希尔伯特空间中相应的结论，如向量的傅里叶级数展开公式、帕斯瓦等式等．

独立于乐维希，对不可分希尔伯特空间理论发展做出重要贡献的还有雷利希、德国数学家泰希米勒（Oswald Teichmuller，1913—1943 年）和里斯等人．1935 年雷利希在 *Mathematische Annalen* 杂志发表了“非可分空间的谱理论”[②]一文，

① Ernst Zermelo 在 1904 年证明每个集合都能够良序化（在某种重新排列下）．

② Rellich F. Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen [J]. Mathematische Annalen, 1935, 110(1): 342-356.

讨论了希尔伯特空间上线性算子的置换理论，该抽象理论与物理学中的量子力学问题有关，这也是他的重要工作之一．泰希米勒在 1936 年发表“Wachsschen 空间上的算子”[①]一文，这也是他的博士论文．值得一提的是，1939 年泰希米勒发表论文“代数学家需要选择公理吗？”[②]，最先在泛函分析中引入了极大性原理替代良序定理，突出了泛函分析自身的方法性．

2. 希尔伯特空间上连续线性泛函的表示

乐维希在 1934 年的工作中不仅引入了不可分希尔伯特空间，深入研究了不可分希尔伯特空间的理论，而且在此基础上研究了其上的泛函和算子理论，给出了所定义的完备复欧几里得空间上连续线性泛函表示结论[③]：

对于完备复欧几里得空间 $\mathbf{R}$ 上的任一有界线性泛函 L，存在一个（只有一个）生成元，也就是说，空间 $\mathbf{R}$ 中存在元 u，使得对 $\mathbf{R}$ 中的每个元 τ，都有

$$L\tau=\left(\tau,u\right).$$

乐维希引用了里斯 1930 年关于复希尔伯特空间的工作．他先指出，上述结论对于有限维复欧几里得空间和复可分希尔伯特空间已被众人所熟知，其成立的关键是存在向量 $\boldsymbol{u}$，满足条件

$$\left\|\boldsymbol{u}\right\|=\left\|L\right\| \text{ 且 } L\left(\boldsymbol{u}\right)=\left\|\boldsymbol{u}\right\|^2.$$

乐维希通过将这一结论推广到完备复欧几里得空间给出了上述结论的证明．

紧接着乐维希 1934 年的工作，里斯在同一期杂志上发表了一篇 5 页的论文“关于希尔伯特空间的理论”[④]，该工作是他 1930 年“关于复希尔伯特空间的线性变换”工作的连续，也给出了没有可分性要求的希尔伯特空间上连续线性泛函表示的结论．实际上，里斯在该文中主要证明了下面两个结论．

【定理 5.1】如果希尔伯特空间 H 的线性子空间 G 在 H 中不是处处稠密的，那么存在元素 g，且 $|g|=1$，使得 g 与 G 中所有元素正交．

① Teichmüller O. Operatoren im Wachsschen Raum [J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1936, 174: 73-124.

② Teichmüller O. Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom [J]. Deutsche Math, 1939, 4: 567-577.

③ Löwig H. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl [J]. Acta Szeged, 1934, 7: 1-33.

④ Riesz F. Zur Theorie des Hilbertschen Raumes [J]. Acta Sci. Math. (Szeged) 1934, 7: 34-38.

【**定理 5.2**】对任意线性泛函l，存在唯一确定的生成元g，使得$l(f)=(f,g)$.

里斯首先指出以上两个定理在复（可分）希尔伯特空间理论中是众所周知的，但通常建立在可数稠密子集存在的基础上．他说：

“通常基于可分性的要求，也就是说，存在可数的几乎处处稠密的子集；这些子集以熟知的方式形成完备正交系，这样通过可数的坐标给出空间的表示.”

因此该文的主要目的就是证明以上两个定理在不要求可分性的条件下也成立.

利用内积空间中范数的平行四边形法则，里斯给出了定理 5.1 的证明．然后利用定理 5.1 的结论，令

$$G=\ker(l),$$

则存在g使得$g\perp G$，并选取合适的g使得

$$l(f)=(f,g).$$

不可分希尔伯特空间的引入和研究，使得对希尔伯特空间理论的研究超越了可分空间中对坐标法的依赖，更注重于从空间的自身结构出发，标志着希尔伯特空间理论的成熟，也标志着泛函分析自身方法的确立.

5.1.2 $C(K)$ 的对偶空间

第 3 章已叙述过，1911 年里斯利用有界变差函数给出了$C[a,b]$上连续线性泛函的表示，但他的结果有两个不足之处：有界变差函数$\alpha(x)$不能唯一确定，并且用他的这种方法将结论向高维情形推广时比较烦琐.

图 5.1　拉东

这些不足被奥地利数学家拉东（Johann Radon，1887—1956 年）（见图 5.1）于 1913 年解决.

拉东 1905 年进入维也纳大学，广泛涉猎数学、物理、化学、哲学和逻辑等课程．他还参加各种讲座课程，如汉恩的理论计算和几何基础，沃廷格（Wilhelm Wirtinger，1865—1945 年）的常微分方程，以及默滕斯（Franz Mertens，1840—1927 年）的代数和数论讲座等．他在埃舍里希（Gustav Ritter von Escherich，1849—1935 年）和沃廷格的指导下于

1910 年取得博士学位．1911—1912 年的冬季，他来到哥廷根，参与了希尔伯特的讨论班，后来成为布鲁恩大学的助教．1913 年为获得维也纳大学授课资格，他提交了“绝对可加集函数的理论和应用”[①]一文，也因此取得讲师资格．其博士论文指导老师埃舍里希审阅了他的论文，并说：

“（拉东）创立了绝对可加集函数理论，在这之前，该理论几乎未被研究过，作者成功地发展了一套抽象理论，使得积分方程理论、无穷个变量的线性和双线性形式作为其特殊情形．在这个过程中，他克服了巨大困难，结合了斯蒂尔杰斯（Thomas Jan Stieltjes，1856—1894 年）、勒贝格和海林格（Ernst David Hellinger，1883—1950 年）的积分概念．这篇论文充满了原创和重要的思想．[②]”

文中拉东用集函数代替里斯泛函表示中的有界变差函数 $\alpha(x)$，将里斯表示定理推广到了 $\mathbf{R}^n$ 中闭矩形上的连续函数空间上．

随着拓扑空间理论的蓬勃发展，连续函数空间的定义范围越来越广，由此产生的连续函数空间上的里斯表示定理得到深入推广．巴拿赫于 1937 年将之推广到紧度量空间上的连续函数空间，苏联数学家马尔可夫（Andrey Andreyevich Markov，1903—1979 年）于 1938 年将之推广到正规空间上的连续函数空间，俄罗斯数学家亚历山大洛夫（Aleksandr Danilovich Aleksandrov，1912—1999 年）于 1940 年将之推广到完全正则空间上的连续函数空间，日本出生的美国数学家角谷・静夫（Shizuo Kakutani，1911—2004 年）于 1941 年将之推广到紧空间上的连续函数空间．

5.1.3　$L^p(E,M,\mu)(1\leqslant p\leqslant\infty)$的对偶空间

迪厄多内认为，勒贝格积分理论的建立极大地促进了泛函分析的发展，后来的数学历史发展进程也证明确实如此．

1. $L^1(E,M,\mu)$ **的引入及其对偶空间的刻画**

从函数论角度而言，勒贝格积分理论的建立实际上就已经产生了空间 $L^1(E,M,\mu)$，其中 (E,M,μ) 是测度空间，而 $L^1(E,M,\mu)$ 中的向量即为 E 上勒贝格

① Radon J. Theorie und anwendungen der absolut additiven mengenfunktionen[M]. Hölder, 1913.

② http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Radon.html.

可积函数．但勒贝格首先对黎曼积分中的微积分基本定理进行推广，建立了一维的实直线上的积分理论．1910 年，他又将积分理论推广到一般高维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 上．三年之后，拉东进一步完善高维空间上的勒贝格积分理论，建立了更一般的勒贝格-斯蒂尔杰斯积分理论．

对勒贝格积分理论抽象化的第一人是弗雷歇．1915 年，弗雷歇在抽象集合族构成的 σ-环上定义测度，由此引入了一种定义在抽象集合上实值函数的积分．他的理论被波兰数学家萨克斯（Stanisław Saks，1897—1942 年）引申和细化．萨克斯也是利沃夫学派的成员之一，主要数学成就是积分理论和测度理论．在 1937 年出版的《积分理论》一书中，他将这种积分也称为勒贝格积分．英国数学家丹尼尔（Percy John Daniell，1889—1946 年）也在勒贝格积分理论方面做了一些工作．他是一位纯粹的应用数学家，于 1918 年至 1928 年十年间发表了一系列论文来推广微分和积分理论，他的理论被后人称为“丹尼尔积分”．他利用函数论而非集合论的语言定义了抽象集合上的可积函数，并表明这类函数在等价意义下（即几乎处处相等的函数规定为同一类函数）是完备的．也可以说巴拿赫空间 $L^1(E,M,\mu)$ 是出现于前巴拿赫时代的．

与斯坦豪斯给出 $L^1[a,b]$ 上连续线性泛函表示（即其对偶空间）的出发点不同，$L^1(E,M,\mu)$ 对偶空间的刻画始于积分理论中的经典问题．

在黎曼积分中，通过 $[a,b]$ 上连续函数的不定积分给出了该函数的原函数，建立了积分与微分之间的关系，此即为微积分基本定理：不定积分

$$F(s)=\int_a^s f(t)\,\mathrm{d}t\,,\quad a\leqslant s\leqslant b$$

是连续函数 f 的原函数．

微积分基本定理对数学家们提出了与之相反的问题：什么样的函数可表示为某一函数的不定积分？

1904 年，勒贝格发现“存在具有有界变差的连续函数，但不是某一函数的不定积分．因为若是不定积分，其总变差应趋于零”①，并认识到由不定积分确定的函数具有“绝对连续性”．1905 年，在解决“何时一个连续函数是某个函数的积

① Lebesgue H. L. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1904.

分”问题时，意大利数学家维塔利（Giuseppe Vitali，1875—1932 年）给出了不定积分函数的完全刻画，并创立了术语“绝对连续”.

1910 年，勒贝格将不定积分定义为可测集上的函数

$$f : E \mapsto \int_E f(P)\,\mathrm{d}P,$$

式中 f 在 $\mathbf{R}^n$ 中的给定可测集上是可和的，其主要结果是：“绝对连续可加集函数存在几乎处处有限的导数．[①]”

1913 年拉东推广了勒贝格的工作．他首先提出假设：非负可数可加集函数 $b(E)$ 是可数可加集函数 $f(E)$ 的一组基，若对所有集合，$f(E)$ 有意义且 $b(E)=0$，则 $f(E)=0$．基于假设，他证明了：存在 b 可和函数 Φ 使得等式

$$f(E) = \int_E \Phi(P)\,\mathrm{d}b(P)$$

成立，但是拉东考虑的所有可测子集都包含在给定的 n 维区间上.

几乎过了二十年，拉东的积分理论才被推广到一般情形．这一步主要是波兰数学家尼柯迪姆做出的.

尼柯迪姆 1887 年出生于奥地利的斯坦尼斯拉沃，1974 年卒于美国的尤提卡．1911 年大学毕业后，他开始担任中学数学和物理老师．1919 年 4 月，他和其他十五位数学家创立了波兰数学学会．1924 年，在老师谢尔宾斯基（Wacław Franciszek Sierpiński，1882—1969 年）的强烈建议下，他同意参加华沙大学的博士学位考试，对于恩师的劝说，他甚至调侃道：“因为此我会变得更聪明吗？”1927 年，他获得华沙大学的任职资格．经过前期逐步积累，1930—1945 年这段时期是尼柯迪姆的创作高峰期，发表了 32 篇论文，出版了 4 本书，主要数学成就在测度理论和泛函分析方面，很多定理和概念都是以他的名字命名的，如尼柯迪姆收敛定理、弗雷歇-尼柯迪姆度量空间、尼柯迪姆集、巴拿赫空间的尼柯迪姆性质等．尼柯迪姆对拉东思想的推广主要体现在 1930 年和 1931 年的两篇论文中．图 5.2 是巴拿赫与尼柯迪姆讨论问题的雕像。

① Lebesgue H. L.Sur l'intégration des fonctions discontinues [C] //Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Société mathématique de France, 1910, 27: 361-450.

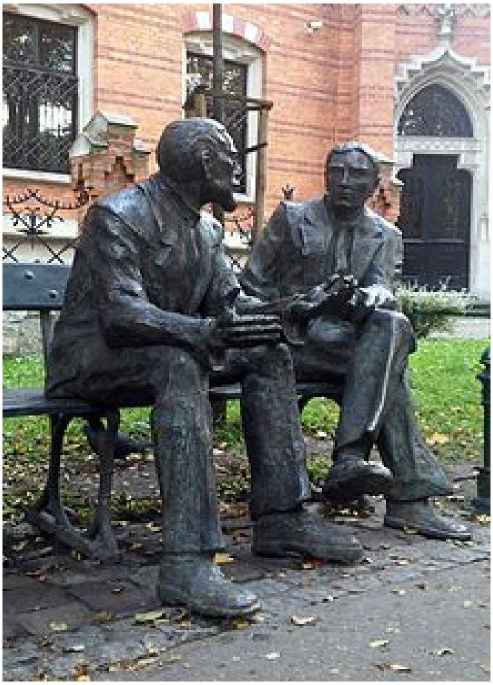

图 5.2　巴拿赫与尼柯迪姆讨论问题的雕像

1930 年他发表“拉东积分的推广”①一文，题目就表明了这篇文章的动机，即得到拉东-尼柯迪姆定理，也称勒贝格–拉东-尼柯迪姆积分：

设 μ 是有限的，则对任意 $A \in M$，每个 μ-连续可数可加集函数 ν 可表示为

$$\nu(A) = \int_A f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)\,.$$

这是尼柯迪姆早期最重要的数学成就，也是泛函分析中的一个基本定理.

在此基础上，尼柯迪姆于 1931 年发表了“与抽象集合测度理论有关的线性泛函理论”②一文，得到了空间 $L^1(E,M,\mu)$ 上有界线性泛函的一般刻画，并在抽象的测度空间上给出了表示：

对任意 $f \in L^1$，存在 $g \in L^\infty$，有

① Nikodym O. Sur une généralisation des intégrales de M.J Radon [J]. Fundamenta Mathematicae, 1930, 1(15): 131-179.

② Nikodym O. Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits [J]. Mathematica, Cluj, 1931, (5): 130-141.

$$l(f)=\int f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t),$$

式中 $\mu(E)<\infty$．该式表明 $L^1(E,M,\mu)$ 的对偶空间是 $L^\infty(E,M,\mu)$，推广了斯坦豪斯于 1919 年取得的结果.

尼柯迪姆关于测度理论的研究引起了他对布尔格的兴趣，在此基础上开始研究希尔伯特的算子理论.

2. $L^p(E,M,\mu)(p>1)$ 的引入及其对偶空间的刻画

在“可积函数组的研究”一文中，里斯引入了空间 $L^p[a,b](1<p<\infty)$．他不仅由 $L^p[a,b]$ 上积分方程组的求解引入了 $L^q[a,b]$，间接给出了 $L^q[a,b]$ 上连续线性泛函的表示形式，而且也利用 $L^p[a,b]$ 上的不定积分给出了直接刻画．同时，里斯在这篇文章中也给出了如何将闭区间 $[a,b]$ 替换为 $\mathbf{R}^n$ 中任意可测集的刻画.

接下来的工作是由拉东做出的.他首先创立了 $L_p(b)$ 空间，b 是 $\mathbf{R}^n$ 中立方体 J 上任意非负 σ-可加测度．用现代的观点来看，他的定义很奇怪，因为 $L_p(b)$ 中的元素被认为是实值绝对可加集函数，具有下列性质：存在 $M\geqslant 0$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f\left(E_k\right)\right|^p}{b\left(E_k\right)^{p-1}}\leqslant M^p,$$

式中 $E_1,\cdots,E_n$ 是 J 中互不相交的有限可测集合．在此基础上，拉东定义了弱收敛和强收敛，证明了 $L_p(b)$ 中闭单位球的弱紧性和范数意义上的完备性．基于双线性形式

$$\langle f,g\rangle=\int_J\frac{\mathrm{d}f\cdot\mathrm{d}g}{\mathrm{d}b}=\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{f(E_k)g(E_k)}{b(E_k)},$$

他建立了 $L_p(b)$ 与 $L_{p^*}(b)$ 的对偶，进而建立了

$$L_p(b)^*=L_{p^*}(b),$$

将 $L_{p^*}(b)$ 中的集函数与 $L_p(b)^*$ 中的泛函建立起了联系，这里 $\dfrac{1}{p^*}+\dfrac{1}{p}=1$.

建立在一般可测空间 (E,M,μ) 上的空间 L^p 可能产生于 20 世纪 30 年代. 有了

一般可测空间上的勒贝格函数空间 L 后，该空间的产生就会与 $L^p[a,b]$ 的产生一样自然．1938 年美国数学家邓福德（Nelson James Dunford，1906—1986 年）给出了有限测度空间 (E,M,μ) 上空间 L^p 的对偶空间是 $L^q(E,M,\mu)$ 的结论，他也因泛函分析的成果而著名．1951 年，邓福德的博士生施瓦兹（Jacob Theodore Schwartz，1930—2009 年）延续其老师的方式，在拉东-尼柯迪姆定理的基础上给出了一般情形下的证明．而美国数学家麦克沙恩（Edward James McShane，1904—1989 年）在 1950 年则利用巴拿赫空间技巧证明了相同的结论．

除以上提到的具体赋范线性空间及其对偶空间在对偶空间理论形成之后的抽象发展外，在此过程中也产生了更多具体赋范线性空间及其对偶空间的刻画，如 $C_b(M)$，即豪斯多夫拓扑空间 M 上的有界函数空间，当 M 是正规豪斯多夫空间时，其对偶空间由马尔可夫于 1938 年给出．1983 年，亚历山大洛夫将其推广到 M 是完全正则豪斯多夫空间的情形．l^∞ 的对偶空间是美国数学家希尔德布兰特（Theophil Henry Hildebrandt，1888—1980 年）于 1934 年给出的，他主要从事泛函分析和积分理论的研究，他在 l^∞ 上的连续线性泛函与 $P(N)$（自然数集 N 的幂集）上的有界可加函数 μ 之间建立了一一对应，这一发现将集函数（测度）与线性泛函（积分）联系起来，是巴拿赫空间理论中的重要成就之一．

5.2　局部凸线性空间及其上的对偶空间理论

尽管在 20 世纪二三十年代泛函分析学科已基本确立，但在初期，一般拓扑理论对泛函分析的影响并不深刻．我们知道，波兰数学家豪斯多夫（Felix Hausdorff，1868—1942 年）于 1914 年在邻域概念的基础上创立了一般拓扑理论①，但直到 1934 年，冯·诺依曼才在希尔伯特空间上通过邻域的语言引入弱拓扑的定义，这种现象一直持续到 20 世纪 50 年代．在此期间，一些具有拓扑结构非赋范的线性空间得到了零散的研究．

① Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 211.

1926 年，弗雷歇开始研究比赋范线性空间中的拓扑较弱的一类拓扑线性空间，称之为“拓扑仿射（affine）空间”[①]．在这类空间中，加法和数乘运算按其拓扑连续．尽管弗雷歇在 1906 年的博士论文中开创了度量空间理论，但其只重视空间的度量关系，即拓扑结构，并没有更多地关注这些空间中的线性结构以及线性结构与拓扑结构的结合．

1932 年，巴拿赫在其专著的第三章中将弗雷歇的思想抽象明确化，定义了“F-型空间”．一个“F-型空间”既是一个线性空间又是一个度量空间，且满足条件：

Ⅰ．完备的；

Ⅱ．$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},0)$；

Ⅲ．$t_n\to 0$，则对任意 $\boldsymbol{x}$，$t_n\boldsymbol{x}\to 0$；

Ⅳ．若 $(x_n,0)\to 0$，则对任意数 t，$(tx_n,0)\to 0$．

其中 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的距离．

“F-型空间”的重要性在于它是闭图像定理在其上成立的一类非赋范线性空间，并且在之后的分布理论中扮演基础角色．

巴拿赫之后，奥地利数学家科特（Gottfried Köthe，1905—1989 年）和德国数学家托普利兹研究了现被称为“Köthe 序列空间”的拓扑线性空间[②]．

1935 年，冯 • 诺依曼发表“完备拓扑空间”[③]一文，研究了一类每点都存在一个凸邻域基的拓扑线性空间，引入了“凸空间”的定义．在该文的前言中，他陈述了在一般拓扑空间中引入线性结构的重要性：

“度量空间中一致性的要求是由基本序列中的元素被假定为彼此互相邻近，而不是在一个固定点的附近这一事实引起的．作为一般的拓扑空间，不具备性质定义这样的一致性概念，不可能在它上面有合理的理由定义‘完备性’．

然而，线性空间对于定义在其上的拓扑来说可能会有一致性，即使仅仅是对

① Taylor A. E. A study of Maurice Fréchet: III. Fréchet as analyst, 1909–1930 [J]. Archive for history of exact sciences, 1987, 37(1): 25-76.

② Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981: 217.

③ von Neumann J. On complete topological spaces [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1935, 37(1): 1-20.

于拓扑而言，因为与其统一的所有问题都可以在 0 的邻域中进行讨论，如此一来，我们便可以引入以下定义.”

该文第一节给出了拓扑线性空间的定义.

【定义 2】一个线性空间 L 称为是可拓扑化的，如果 L 中存在集族 μ 满足下列条件：

Ⅰ. 若 $U \in \mu$，则 $0 \in U$；

Ⅱ. 存在序列 $U_1, U_2, U_3, \cdots \in \mu$，使得 $\bigcap_i U = \{0\}$；

Ⅲ. 若 $U, V \in \mu$，则存在 $W \in \mu$，使得 $W \subset U \bigcap V$；

Ⅳ. 若 $U \in \mu$，则存在 $V \in \mu$，对任意 $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$，$\alpha V \subset U$；

Ⅴ. 若 $U \in \mu$，则存在 $V \in \mu$，$V + V \subset U$；

Ⅵ. 若 $f \in L$，$U \in \mu$，则存在 α，$\alpha f \in U$.

冯 • 诺依曼进一步定义了“凸”拓扑线性空间：若 L 还满足条件

Ⅶ. 若 $U \in \mu$，则 $U + U \subset 2U$.

冯 • 诺依曼的凸拓扑线性空间即为现代的“局部凸拓扑线性空间”. 局部凸拓扑线性空间是现代分析学科中的一类非常重要的拓扑线性空间，是分布理论建立的基础，在概率论中也有重要应用. 从希尔伯特空间和巴拿赫空间的研究转到（局部凸）拓扑线性空间的研究，是泛函分析现代理论发展史上取得的里程碑式的进展.

体现局部凸拓扑线性空间重要性的一个关键因素是，汉恩-巴拿赫泛函延拓定理在其上成立，也就是说，局部凸拓扑线性空间上有丰富的对偶空间理论.

20 世纪 30 年代，关于凸集理论的研究兴起. 1933 年，巴拿赫的学生马祖尔（Stanisław Mazur，1905—1981 年）给出了汉恩-巴拿赫泛函延拓定理的几何形式①：

“设 K 是实赋范线性空间 X 中的凸集且有非空内部，V 是 X 的线性子空间且不包含 K 的内点，则存在 X 上的闭超平面包含 V 但不包含 K 中的内点，即存在 X 上的连续线性泛函 f 及常数 c，使得对任意 $x \in V$，$f(x) = c$，且对 K 内部中的任

① Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators [M]. Springer Science & Business Media, 2007: 71.

意 y，$f(y)<c$.”

1941 年，迪厄多内将其推广到一般的拓扑线性空间，其最终形式收录在布尔巴基学派的著作中①.

“设 M 是拓扑线性空间 X 中的线性子空间，K 是 X 中的非空凸开子集且

$$K \cap M = \varnothing,$$

则存在 X 上的闭超平面包含 M 且与 K 不交.”

这一结论表明凸性对于连续线性泛函存在的重要性.

1942 年迪厄多内在“拓扑线性空间上的对偶”②一文中，对局部凸空间的对偶概念进行了一般性研究，并取得了重要成果，这一工作是后来对偶性研究及在泛函分析中应用的基础. 他在局部凸拓扑空间的框架下重新阐释了赋范线性空间的对偶空间上的弱*紧定理. 他的这一思想动力正如其所言：

“布尔巴基并不打算改革数学，如果一个定理在两年、二十年或两百年前就已被证明，那么布尔巴基做什么？我们需要做的是：定义和推广长期以来广为人知的思想. ③”

他的一个重要概念是半范数，半范数在拓扑线性空间理论中扮演着重要的角色，是处理一类特殊凸集的解析工具，并由此定义了局部凸拓扑空间.

若 $\{P_\alpha\}$ 是线性空间 E 上的一族半范数，定义

$$U_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\varepsilon}=\left\{x\in E:\sup P_{\alpha_i}(x)\leqslant\varepsilon\right\},$$

则 $U_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\varepsilon}$ 形成 0 的一个凸且平衡的邻域基，从而 E 成为局部凸拓扑线性空间. 反之，局部凸拓扑线性空间上的拓扑都可如此定义. 在该文中，迪厄多内通过连续线性泛函与闭超平面之间的一一对应，运用几何和分析两种形式明确给出了局部凸拓扑线性空间上的连续线性泛函延拓定理.

“设 E 是一个局部凸空间，K 是一个凸开集，V 是一个与 K 不交的线性子空间，则存在一个包含 K 的闭超平面且与 V 不交.”

① Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators [M]. Springer Science & Business Media, 2007: 72.

② Dieudonné J. La dualité dans les espaces vectoriels toplogiques[c] //Annales scientifques de I’Ecole Normale Supérieure. 1942, 59: 107-139.

③ Dieudonné J. The work of Nicholas Bourbaki [J]. The American Mathematical Monthly, 1970, 77(2): 134-145.

“若V是E的一个闭线性子空间，$x_0 \notin V$，则存在包含V的闭超平面不包含x_0.”

“若G是E的任一线性子空间，f是定义在G上的连续线性泛函，则存在定义在E上的连续线性泛函$\overline{f}$是f的延拓.”

“$0 \neq x_0 \in E$，p是E上的半范数且$p(x_0) \neq 0$，则存在连续线性泛函f，

$$f(x_0) = p(x_0),$$

且对任意$x \in E$，$|f(x)| \leqslant p(x)$.”

通过局部凸空间与其对偶空间，迪厄多内定义了弱拓扑.

设E是一个局部凸拓扑线性空间，T是E的拓扑，E'表示E上连续线性泛函全体（这里的连续是由T所确定的），E'是一个向量空间，称为E的对偶空间（注意，这时E'上并没有拓扑）.

对任意$x \in E$，$x' \in E'$，定义

$$B(x, x') = x'(x),$$

则$B(x, x')$满足条件：

Ⅰ. 若对任意$x \in E$，有$B(x, x') = 0$，则$x' = 0$；

Ⅱ. 若对任意$x' \in E'$，有$B(x, x') = 0$，则$x = 0$.

由此，对任意$x' \in E'$，$B(x, x')$为E上的一个半范数. 由此可以定义E上的拓扑，称为弱拓扑，记为$\sigma(E, E')$. 同理，对任意$x \in E$，$B(x, x')$为E'上的一个半范数，由此可以定义E'上的拓扑，记为$\sigma(E', E)$.

迪厄多内指出，关于局部凸拓扑线性空间及其上弱拓扑的理论，来源于巴拿赫空间及其对偶空间上的相应理论，以及豪斯多夫关于拓扑赋范空间上的相关理论. 因此，迪厄多内关于赋范线性空间及其对偶空间上的弱拓扑结论是一个从具体到抽象再到具体的过程.

5.3 对偶思想的影响

对偶空间的出现不仅统一了分析学和代数学中的一些具体问题的求解，改变了研究第二型积分方程和线性方程组问题的路径，而且使得这个概念本身成为独立的研究对象，推动了现代泛函分析中抽象对偶空间理论的发展，促进了

泛函分析的进一步发展．因此，对偶空间理论不仅是重要的研究内容，也是重要的研究方法．

而对偶空间理论中蕴含的对偶思想，几乎是 20 世纪全部的数学思想，它不仅促成了泛函分析的纵深发展，而且在很大程度上改变了数学分析的整个面貌，也广泛应用于各个学科，推动了许多新领域的产生．在此列举几个例子简要说明．

5.3.1　算子代数的产生

巴拿赫用公理化方法研究了对偶空间理论，在此基础上，建立了著名的线性算子理论，其 1932 年出版的《线性算子理论》一书标志着泛函分析学科的确立．经 Google 学术搜索发现，到目前为止这本书的引用次数高达三千多次，且此数据一直在被刷新，足以说明其对数学发展的影响．

乌克兰数学家盖尔方德（Israel Moiseevich Gelfand，1913—2009 年）在恩师柯尔莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov，1903—1987 年）的推荐指导下，在新兴的泛函分析领域从事研究工作．1935 年，他以关于抽象函数和线性算子的论文获副博士学位．在该文和稍早的另一篇论文中，他得到了泛函分析中的不少基本结果，例如完全赋范空间的“桶形”性质，通过二次对偶空间中的元素定义现称的盖尔方德-佩蒂斯积分等．他还在证明过程中建立了泛函分析中通用的通过连续线性泛函转化为经典分析中对象的方法．所有这些为其 1940 年的博士论文奠定了基础，在学位论文中，他创建了赋范环论，即巴拿赫代数．他主要用极大理想空间去研究巴拿赫代数．巴拿赫代数是泛函分析的一个重要分支，研究带有乘法的赋范线性空间的性质及其应用．盖尔方德的巴拿赫代数理论建立在对偶的基础上．角谷•静夫也基于极大理想空间的方法研究了群代数的对称性．

5.3.2　局部紧群上调和分析的研究

一个既有群结构又有拓扑结构，并且两者有某种联系的集合称为一个拓扑群，当它的拓扑结构是局部紧时，称为局部紧群．古典调和分析主要为傅里叶级数与傅里叶积分理论，傅里叶变换是其基本方法．调和分析把泛函分析与实际问题结合起来，函数空间的刻画是其中心研究内容之一．后来数学家们通过一些数学事

实发现，调和分析的合适对象可以是更一般群上的函数，这正是群上调和分析这一学科诞生的动力．然而，一般群上进行调和分析研究的可行性，首先是要能在其上定义傅里叶变换．

20 世纪 20 年代初，德国数学家外尔从一般空间问题出发进而研究连续群的表示，并于 1925—1927 年做出了最出色的工作，其中包括半单李群的线性表示等，他还把经典有限群的结果扩展到紧群上去，首先在一些特殊紧群上，后来又与数学家彼得（F. Peter）在一般紧群上定义了傅里叶变换，奠定了紧群上调和分析的基础．在群理论中，需要研究群 G 上的特征标，这些全体特征标构成了群 G 的对偶群，并且这个对偶群的盖尔方德拓扑也是局部紧的，这奠定了在群上定义傅里叶变换的基础．拓扑群理论中一个重要而有趣的结论是庞特里亚金对偶定理，它由俄罗斯数学家庞特里亚金（Lev Semionovich Pontryagin，1908—1988 年）的名字命名，它表明一个紧群的对偶是离散群，一个离散群的对偶是紧群．

5.3.3　嘉当的外形式法

考虑一个群和一个向量空间（不必是有限维的）作同态，该同态称为一个表示．此同态将关于群的问题投射到一般线性群中来考虑，而后者是我们非常熟悉的结构．然而，作连续同态会丢失群的一部分信息，因为同态是退化的．这时就需要进一步考查同态的表达式，这样即可知道信息是怎样退化的，哪些信息被退化了．

由此可知，作为表示而言，最重要的是研究连续同态，而不是研究一般线性群．并且通过研究所有可能的此类连续同态构成的集，甚至可以专注于该集合本身而不去考虑一般线性群．因为对于群而言，能够定义在它上面的所有到一般线性群的连续同态显然已经能够体现群的全部信息．这相当于不考虑研究对象而去研究对象的表示．同样的思想在范畴论中也是核心，因为在范畴论中，代替单个对象而研究一族对象，代替连续同态考虑作用在全体对象上的态射，并且希望研究这些态射的行为从而忽略对象．这些理论在处理态射方面的思想全部是一致的，是基本的、朴素的思想：当定义一个映射的微分时，应该把它定义成映射而非古典意义下的标量．

这就导致法国数学家嘉当（Élie Cartan，1869—1951 年）关于外微分的工作和整个微分学的发展．一个直接的例子是活动标架的处理方式，它在几何上非常基本而有用；另外，这个技术使得分析学家们能够在巴拿赫流形上研究微分学．因为巴拿赫空间未必存在 Schauder 基①，所以传统意义下依赖于坐标的处理方式是行不通的．

5.4　小结

本章主要考查了巴拿赫之后对偶空间理论的发展状况．通过分析乐维希、里斯等人的不可分希尔伯特空间工作，拉东和尼柯迪姆等数学家对 $C(K)$、$L^p(E,M,\mu)$ 的对偶空间的研究工作，冯·诺依曼和迪厄多内等人关于局部凸线性空间的对偶空间的研究工作，梳理对偶空间理论由具体巴拿赫空间到可测函数空间，进而到局部凸空间上的函数空间的发展过程，初步探讨了函数论、测度论、拓扑论等理论对对偶空间理论发展的促进作用．透过这一过程也不难理解 20 世纪数学“更高抽象性和更高统一性”的发展特征．

美国应用数学家戴维斯（Philip J. Davis，1923—2018 年）曾说：“巨人们总是站在小巨人们的肩上，若没有强有力的连续性支撑，整个金字塔就会垮塌．②”对偶空间理论这座数学大厦就是这样一步步由众多数学家的不懈努力建立起来并不断发展着的一套理论，并成为泛函分析学科的重要组成部分．

对偶空间理论的形成过程也是数学思想的发展成熟过程．从中我们看到：希尔伯特在积分方程方面的工作是对偶空间理论形成的奠基性工作，标志着对偶空间思想的萌芽；里斯在不同具体空间中的方程方面的工作将希尔伯特的这一思想逐渐明晰化，对偶空间的思想已渐露头角，含苞待放；而黑利、汉恩、巴拿赫等人的抽象化工作推动了对偶空间思想由量变到质变的转化．其后，数学的各个分支逐渐交叉作用，函数、拓扑、代数等学科的内容与方法更广泛地应用在泛函分

① 设 V 是域 F 上的巴拿赫空间，$\{b_n\}$ 是 V 中的一列元素，若对任意 $v\in V$，F 中存在唯一的一列元素 $\{a_n\}$ 使得 $v=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$，则称 $\{b_n\}$ 为 V 的一个 Schauder 基.

② Albers D, Alexanderson G L.Mathematical People [M]. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1985: xv.

析中，对偶空间理论更加丰富．反过来，对偶的思想也渗透到数学的各个分支中，成为现代数学的主要思想之一．通过对其中每个数学家思想的理解，就像在整个数学地图上形成的一个个坐标，这些坐标顺理成章地衔接上对偶空间理论中的重要事件，诉说着它们的来龙去脉．从某一角度看，数学史不过是一群数学家与其故事、成果的堆积，但从另一角度看，它却是由一些扭转乾坤的数学家和一些改变数学发展方向的思想环环相扣而成的．

参 考 文 献

A. 外文参考文献

原始文献

[1] Alaoglu L. Weak topologies of normed Linear spaces[J]. Annals of Mathematics, 1940: 252-267.

[2] Banach S. Sur les fonctionelles linéaires I [J]. Studia Mathematica, 1929, 1(1): 211-216.

[3] Banach S. Sur les fonctionnelles linéaires II [J]. Studia Mathematica, 1929, 1(1): 223-239.

[4] Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals [J]. Fund. Math, 1922, 3(1): 133-181.

[5] Banach S. The Lebesgue integral in abstract spaces [J]. S. Saks, Theory of the Integral, 2nd. English edition, 1937: 320-330.

[6] Banach S. Theorie des operations lineaires [M]. Warsaw, 1932.

[7] Bohnenblust H F, Sobczyk A. Extensions of functionals on complex linear spaces [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1938, 44(2): 91-93.

[8] Bourbaki N. Elements d'Histoire des Mathématiques [M]. Paris: Hermann, 1974.

[9] Bourbaki N. Sur les espaces de Banach [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1938, 206: 1701-1704.

[10]Bourbaki N. Sur certains espaces vectoriels topologiques [C] //Annales de l'institut Fourier. 1950, 2: 5-16.

[11] Bourlet C. Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini [C] //Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1897, 14: 133-190.

[12] Calkin J. W. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space[J]. Annals of Mathematics, 1941: 839-873.

[13] Dieudonné J. La dualité dans les espaces vectoriels toplogiques[c] //Annales scientifques de I'Ecole Normale Supérieure. 1942, 59: 107-139.

[14] Fischer E. Sur la convergence en moyenne [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144:

1022-1024.

[15] Fréchet M. Généralisation d’un théorème de Weierstrass [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1904, 139: 848-850.

[16] Fréchet M. La notion d’écart et le calcul fonctionnel [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1905, 140: 772-774.

[17] Fréchet M. Les ensembles de courbes continues [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1905, 141: 873-875.

[18] Fréchet M. Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 1414-1416.

[19] Fréchet M. Sur les fonctions d'une infinitéde variables [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1905, 140: 567-568.

[20] Fréchet M. Sur les opérations linéaires [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1904, 5(4): 493-499.

[21] Fréchet M. Sur Les Operations Lineaires (Deuxieme Note) [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1905, 6(2): 134-140.

[22] Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 1906, 22(1): 1-72.

[23] Fredholm I. Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet [J]. Œuvres completes: publiées sous les auspices de la Kungliga svenska vetenskapsakademien par l’Institut Mittag-Leffler, 1900: 61-68.

[24] Hadamard J. Sur les opérations fonctionnelles [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1903, 136: 351-354.

[25] Hahn H. Über Folgen linearer operationen [J]. Monatshefte für Mathematik, 1922, 32(1): 3-88.

[26] Hahn H. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen [J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1927, 157: 214-229.

[27] Helly E. Über lineare Funktionaloperationen [J]. Wien. Ber, 1912, 121: 265-297.

[28] Helly E. Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [J]. Monatshefte für Mathematik, 1921, 31(1): 60-91.

[29] Hilbert D. Grundzüge einer allgeminen Theorie der linearen Integralrechnungen.Erste Mitteilung [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-

Physikalische Klasse, 1904: 49-91.

[30] Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1906: 157-228.

[31] Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Fünfte Mitteilung [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1906: 439-480.

[32] Hilbert, D. Grundzüge Einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen[M]. B. G. Teubner: Leipzig, 1912: 1-205.

[33] Jordan P, Neumann J. On inner products in linear, metric spaces [J]. Annals of Mathematics, 1935: 719-723.

[34] Landau E. Über einen Konvergenzsatz [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1907: 25-27.

[35] Lebesgue H. L. Intégrale, longueur, aire [J]. Annali di matematica pura ed applicata, 1902, 7(1): 231-359.

[36] Lebesgue H. L. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1904.

[37] Lebesgue H. L. Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1906.

[38] Lebesgue H. L. Sur l'intégration des fonctions discontinues [C] //Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Société mathématique de France, 1910, 27: 361-450.

[39] Lengyel B. A, Stone M H. Elementary proof of the spectral theorem [J]. Annals of Mathematics, 1936: 853-864.

[40] Löwig H. Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl [J]. Acta Szeged, 1934, 7: 1-33.

[41] Murray F. J, Neumann J. On rings of operators [J]. Annals of Mathematics, 1936: 116-229.

[42] Neumann J. Mathematische Begründung der Quantenmechanik [J]. Nachrichten von der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematischphysikalische Klasse, 1927: 1–57.

[43] Neumann J. On complete topological spaces [J]. Transactions of the American Mathematical

Society, 1935, 37(1): 1-20.

[44] Nikodym O. Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits [J]. Mathematica, Cluj, 1931, (5): 130-141.

[45] Nikodym O. Sur une généralisation des intégrales de M.J Radon [J]. Fundamenta Mathematicae, 1930, 1(15): 131-179.

[46] Phillips R. S. A characterization of Euclidean spaces [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1940, 46(12): 930-933.

[47] Pincherle S. Studi sopra alcune operazioni funzionali [J]. Mem. Bologna, 1886, 4(7): 393-442.

[48] Pincherle S. Opere scelte I, II[M]. Roma: Edizioni Cremonese，1954.

[49] Pincherle S. Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies [J]. Acta mathematica, 1887, 10(1): 153-182.

[50] Pincherle S. Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif [J]. Mathematische Annalen, 1897, 49(3): 325-382.

[51] Pincherle S, Amaldi U. Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi [M]. N. Zanichelli, 1901.

[52] Poincaré H. Remarques sur l'emploi de la méthode précédente [J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1885, 13: 19-27.

[53] Poincaré H. Sur les déterminants d'ordre infini [J]. Bulletin de la société mathématique de France, 1886, 14: 77-90.

[54] Radon J. Theorie und anwendungen der absolut additiven mengenfunktionen [M]. Hölder, 1913.

[55] Rellich F. Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen [J]. Mathematische Annalen, 1935, 110(1): 342-356.

[56] Riesz F. Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires [J]. Ann. Ec. Norm. 1914, 3: 490-495.

[57] Riesz F. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913.

[58] Riesz F. Sur les opérations fonctionnelles linéaires [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1909, 149(974-997): 12.

[59] Riesz F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 615-619.

[60] Riesz F. Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables [J]. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1907, 144: 1409-1411.

[61] Riesz F. Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes [J]. Acta Sci. Math.(Szeged), 1930, 5: 23-54.

[62] Riesz F. Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen [J]. Mathematische Annalen, 1910, 69(4): 449-497.

[63] Riesz F. Zur Theorie des Hilbertschen Raumes [J], Acta Sci. Math (Szeged), 1934, 7:34-38.

[64] Schauder J. Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen [J]. Studia Mathematica, 1930, 1(2): 183-196.

[65] Schmidt E. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 1908, 25(1): 53-77.

[66] Steinhaus H. Additive und stetige Funktionaloperationen [J]. Mathematische Zeitschrift, 1919, 5(3): 186-221.

[67] Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis [M]. American Mathematical Soc., 1932.

[68] Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space. I. Geometrical aspects [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1929, 15(3): 198.

[69] Stone M. H. Linear transformations in Hilbert space: III. Operational methods and group theory [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1930, 16(2): 172.

[70] Teichmüller O. Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom [J]. Deutsche Math, 1939, 4: 567-577.

[71] Volterra V. Opere matematiche: 1881-1892 [M]. Roma: Accademia nazionale dei Lincei, 1954.

[72] Volterra V. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni [J]. Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1887, 3: 97-105.

[73] Volterra V. Sopra le funzioni dipendenti da linee [J]. Rend. Acc. Lincei ser. IV, 1887, 3: 274-281.

[74] Volterra V. Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse [J]. Rend. Lincei, 1887, 4(3): 281-287.

[75] Volterra V. Opere matematiche: memorie e note pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei

Lincei col concorso del Consiglio nazionale delle ricerche [M]. 1957.

[76] Von Koch H. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires [J]. Acta mathematica, 1891, 15(1): 53-63.

[77] Von Koch H. Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires [J]. Acta mathematica, 1892, 16(1): 217-295.

研究文献

[78] Albers D. J, Alexanderson G L. Alexanderson. Mathematical People [M]. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1985.

[79] Aupetit B. Functional analysis in historical perspective: By AF Monna. Utrecht (Oosthoek Publishing Co). 1973. 17S p [J]. Historia Mathematica, 1976, 3(1): 93-95.

[80] Bernkopf M. The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1966, 3(1): 1-96.

[81] Birkhoff G, Kreyszig E. The establishment of functional analysis [J]. Historia mathematica, 1984, 11(3): 258-321.

[82] Bourbaki N, Meldrum J. Elements of the History of Mathematics [M]. Springer Science & Business Media, 1998.

[83] Boyer C. B, Merzbach U C. A history of mathematics [M]. John Wiley & Sons, 2011.

[84] Butzer P. L, Gieseier S, Kaufmann F, Nessel R J and Stark E L. Eduard Helly (1884-1943): eine nachträgliche Würdigung [M]. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 82 (1980):128-151.

[85] Butzer P. L, Nessel R J, Stark E L. Eduard Helly (1884–1943), in memoriam [J]. Results in Mathematics, 1984, 7(2): 145-153.

[86] Ciesielski K, Moslehian M S. Some remarks on the history of functional analysis [J]. Ann. Funct. Anal, 2010, 1(1): 1-12.

[87] Dieudonné J. History of functional analysis [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981.

[88] Dieudonné J. The work of Nicholas Bourbaki [J]. The American Mathematical Monthly, 1970, 77(2): 134-145.

[89] Forgáč L. On the Hahn-Banach theorem [J]. Mathematica Slovaca, 1976, 26(1): 39-45.

[90] Hochstadt H. Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem [J]. The Mathematical Intelligencer, 1980, 2(3): 123-125.

[91] Kac, M. Hugo Steinhaus-A Reminiscence and a Tribute [J]. The American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America), 1974, 81 (6): 572-581.

[92] Kjeldsen T. H. The early history of the moment problem [J]. Historia Mathematica, 1993, 20(1): 19-44.

[93] Kleiner I. History of linear algebra [M] //A History of Abstract Algebra. Birkhäuser Boston, 2007: 79-89.

[94] Kreyszig E. Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis [J]. Elemente Mathematik, 1990, Vol. 45: 117-130.

[95] Lindström J. On the origin and early history of functional analysis [R]. Technical Report UUDM Projrect Report 2008: 1, Uppsala Universitet, 2008.

[96] Monna A. F. Functional Analysis in Historical Perspective [M]. The Netherlands Publishing Company Oosthoek, 1973.

[97] Monna A. F. The concept of function in the 19 th and 20 th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue [J]. Archive for history of exact sciences, 1972, 9(1): 57-84.

[98] Neal L. Carothers. A Brief History of Functional Analysis. BGSU Colloquium, October 15, 1993.

[99] Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators [M]. Springer Science & Business Media, 2007.

[100] Pincherle S. Funktionaloperationen und Gleichungen. Encyklopädie, II A, 11, 761-824 (1903-1921).

[101] Rogosinski W. W. Frederic Riesz [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1956, 1(4): 508-512.

[102] Taylor A. E. A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1982, 27(3): 233-295.

[103] Taylor A. E. A study of Maurice Fréchet: II. Mainly about his work on general topology, 1909-1928 [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1985, 34(4): 279-380.

[104] Taylor A. E. A study of Maurice Fréchet: III. Fréchet as analyst, 1909-1930 [J]. Archive for history of exact sciences, 1987, 37(1): 25-76.

[105] Tricomi F. G. Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

[106] Weinstein A. Review: Vito Volterra, Opere mathematiche. Memorie e Note [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1964, 70(3): 335-337.

[107] Weyl H. A half-century of mathematics [J]. The American mathematical monthly, 1951, 58(8): 523-553.

B. 中文参考文献

图书和论文

[108] A. D. 亚历山大洛夫等著．数学——它的内容、方法和意义（第三卷）[M]．北京：科学出版社，2001.

[108] [法]尚巴达尔著．吴越恩，叶厚荣译．数学词典[M]．北京：高等教育出版社，1989.

[110] [美]莫里斯·克莱因著．邓东皋，张恭庆译．古今数学思想（第四册）[M]．上海：上海科学技术出版社，2002.

[111] Victor J. Katz 著．李文林，王丽霞译．数学史通论（第 2 版）[M]．北京：高等教育出版社，2008.

[112] 定光桂．关于“泛函分析”课程教学改革的试探[J]．高等理科教育，2001, (3): 8-10, 17.

[113] 冯丽霞，袁敏．弗雷歇和里斯泛函表示思想比较分析[J]．西北大学学报（自然科学版），2016, 46(2).

[114] 何思谦总编．数学辞海[M]．太原：山西教育出版社，1998.

[115] 胡世华，杨东屏．中国大百科全书：数学卷[M]．北京：大百科全书出版社，1988.

[116] 胡作玄，邓明立．20 世纪数学思想[M]．济南：山东教育出版社，1999.

[117] 胡作玄．近代数学史[M]．济南：山东教育出版社，2006.

[118] 季理真．Great mathematics books of the twentieth [M]．北京：高等教育出版社，2013.

[119] 李斐，王昌．广义函数简史[M]．北京：电子工业出版社，2018.

[120] 李威，曲安京，王昌．里斯关于矩量问题研究的目的和意义[J]．科学技术哲学研究，2015, 06: 72-75.

[121] 李威，曲安京，王昌．巴拿赫空间是如何产生的[J]．自然辩证法通讯，2015, 37(06): 72-76.

[122] 李文林．数学史概论（第 2 版）[M]．北京：高等教育出版社，2002.

[123] 李文林．数学的进化：东西方数学史比较研究[M]．北京：科学出版社，2005.

[124] 李文林.“三位一体”的科学史[J]．中国科技史杂志，2007, 28(4): 444-448.

[125] 李亚亚，王昌．希尔伯特空间诞生探源[J]．自然辩证法研究，2013, 29(12): 90-94.

[126] 李亚亚，王昌．积分方程视角下函数空间理论的历史[M]．北京：电子工业出版社，2018.
[127] 刘国钰．对偶空间在理论力学中的应用[J]．技术物理教学，2013, 21(2): 6-8.
[128] 穆蕊萍．里斯表示定理前史的探析[J]．西北大学学报（自然科学版），2013, 43(5): 843-846.
[129] 曲安京．中国数学史研究范式的转换[J]．中国科技史杂志，2005, 26(1): 50-58.
[130] 王昌，李亚亚．从希尔伯特空间到巴拿赫空间[J]．科学技术哲学研究，2015, 5: 018.
[131] 夏道行等．实变函数论与泛函分析（下册）（第 2 版）[M]．北京：高等教育出版社，2010.
[132] 谢凤英等．对偶空间上的高分辨率遥感影像道路提取[J]．宇航学报，2006, 27(5): 1034-1038.
[133] 徐西安．“泛函分析”教学方法探讨[J]．高等数学研究，2008, 11(1): 73-75.
[134] 张奠宙．20 世纪数学经纬[M]．上海：华东师范大学出版社，2002.

学位论文

[135] 范丹丹．里斯对泛函分析的贡献[D]．石家庄：河北师范大学，2014.
[136] 付琳．20 世纪 50 年代前泛函分析历史研究[D]．济南：山东大学，2010.
[137] 葛学滨．线性方程组解结构的历史研究[D]．济南：山东大学，2009.
[138] 李斐．分布理论的建立[D]．西安：西北大学，2016.
[139] 李威．积分方程之巴拿赫空间理论的形成[D]．西安：西北大学，2015.
[140] 李亚亚．希尔伯特的积分方程理论[D]．西安：西北大学，2015.
[141] 穆蕊萍．里斯表示定理的形成过程[D]．西安：西北大学，2014.
[142] 任辛喜．偏微分方程理论起源[D]．西安：西北大学，2005.
[143] 王冰霄．弗雷歇对泛函分析及一般拓扑所做的贡献[D]．西安：西北大学，2013.
[144] 王昌．点集拓扑学的创立[D]．西安：西北大学，2012.
[145] 王丹丹．里斯在泛函分析中的两个重要定理[D]．西安：西北大学，2013.
[146] 杨浩菊．行列式理论历史研究[D]．西安：西北大学，2004.

人 名 索 引

A

阿达玛（Jacques Solomon Hadamard，1865—1963 年）

阿斯科利（Giulio Ascoli，1843—1896 年）

埃舍里希（Gustav Ritter von Escherich，1849—1935 年）

B

巴拿赫（Stefan Banach，1892—1945 年）

贝恩科普夫（Michael Bernkopf）

贝蒂（Enrico Betti，1823—1892 年）

彼得（F. Peter）

波尔查诺（Bernard Bolzano，1781—1848 年）

波恩布鲁斯特（Henri Frederic Bohnenblust，1906—2000 年）

波莱尔（Emile Borel，1871—1956 年）

伯克霍夫（Garrett Birkhoff，1911—1996 年）

伯努利（Daniel Bernoull，1700—1782 年）

布莱特（Carlo Bourlet，1866—1913 年）

D

戴维斯（Philip J. Davis，1923—2018 年）

丹尼尔（Percy John Daniell，1889—1946 年）

道尔顿（John Dalton，1766—1844 年）

邓福德（Nelson James Dunford，1906—1986 年）

迪厄多内（Jean Alexandre Eugène Dieudonné，1906—1992 年）

F

G

H

J

K

卡尔金（John William Calkin）

凯莱（Arthur Cayley，1821—1895 年）

康托尔（Georg Cantor，1845—1918 年）

柯尔莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov，1903—1987 年）

科克（Helge von Koch，1870—1924 年）

克莱姆（Gabriel Cramer，1704—1752 年）

克罗内克（Leopold Kronecker，1823—1891 年）

科特（Gottfried Köthe，1905—1989 年）

柯西（Augustin Louis Cauchy，1789—1857 年）

库默尔（Ernst Eduard Kummer，1810—1893 年）

L

拉东（Johann Radon，1887—1956 年）

拉盖尔（Edmond Nicolas Laguerre，1834—1886 年）

拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1736—1813 年）

兰道（Edmund Landau，1877—1938 年）

勒贝格（Henri Léon Lebesgue，1875—1941 年）

乐维希（Von Heinrich Löwig）

雷利希（Franz Rellich，1906—1955 年）

黎曼（Bernhard Riemann，1826—1866 年）

里斯（Frigyes Riesz，1880—1956 年）

伦吉尔（Béla Adalbert Lengyel，1910—2002 年）

罗戈辛斯基（Werner Wolfgang Rogosinski，1894—1964 年）

M

马尔可夫（Andrey Andreyevich Markov，1903—1979 年）

马祖尔（Stanisław Mazur，1905—1981 年）

麦克沙恩（Edward James McShane，1904—1989 年）

麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879 年）

N

P

Q

S

T

W

X

Y

后　记

对偶空间理论是泛函分析中的重要内容之一，它实现了将原空间上的问题转化为其对偶空间上的相应问题，从而可用较简单的方法更好地研究原空间．在研读大量原始文献和相关研究文献基础上，在“为什么数学”思想的指导下，作者深入挖掘了相关数学家研究工作背后所隐藏的思想，以“积分方程的求解”为主线，提炼出对偶空间理论的形成脉络．可以说，对于具体积分方程和线性方程组求解问题的一般思考，建立了抽象的对偶空间理论，并且它们的结论和方法具有普遍意义，对 20 世纪数学的发展有着不可估量的作用．

本文以“积分方程的求解”为主线，对泛函分析中对偶空间理论的形成过程进行了较为系统的论述．因所涉及的背景太宽泛，任何一个概念和理论的形成过程都是很复杂的，因此作者难免有些地方讨论得不够全面．另外，本文主要侧重于对产生对偶空间理论中的数学问题进行分析，对数学家所处时代的社会背景及其对他们的影响，以及数学家的哲学观点及其对数学的认识和他们做数学的方法等方面涉猎较少．这些都成为本书的不足和缺憾，但同时又给作者提供了更多的努力目标和研究方向．

对偶空间理论的形成和发展与数学的许多分支联系都很密切，所涉及的内容多、范围广、要求高，要对其历史进行研究，实属不易．因此，文中对有些地方的思考还不太全面，分析还不够深刻，理解还比较肤浅，在此表示真诚的歉意，欢迎各种形式的批评和建议！